

PRÉPAS SCIENTIFIQUES

MP/MP\* - PSI/PSI\*

PT/PT\* - MPI/MPI\*

CONFORME AU  
NOUVEAU  
PROGRAMME

Alain Caignot • Vincent Crespel • David Violeau

# Sciences industrielles de l'ingénieur

TOUT-EN-UN

COURS • MÉTHODES • ENTRAÎNEMENTS ET SUJETS • CORRIGÉS



**Tout le cours avec :**

- Les objectifs-clés du programme
- Les notions à maîtriser
- Plus de 700 illustrations, schémas et diagrammes explicatifs



**Entraînement intensif avec :**

Des exercices d'application et d'approfondissement inédits, adaptés ou issus de sujets de concours



**Des outils pour réviser :**

- Les synthèses de cours
- Les méthodes et techniques



**Tous les corrigés détaillés**



OFFERT EN LIGNE

- ▶ 100 **flashcards** interactives
- ▶ Toutes les **synthèses** de cours à télécharger

Vuibert



PRÉPAS SCIENTIFIQUES

MP/MP\* - PSI/PSI\*

PT/PT\* - MPI/MPI\*

CONFORME AU  
NOUVEAU  
PROGRAMME

# Sciences industrielles de l'ingénieur

TOUT-EN-UN

COURS • MÉTHODES • ENTRAÎNEMENTS ET SUJETS • CORRIGÉS

**Alain Caignot** est professeur en classes préparatoires scientifiques au collège Stanislas à Paris.

**Vincent Crespel** est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Saint-Louis à Paris.

**David Violeau** est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Janson-de-Sailly à Paris.

Vuibert

**Retrouvez notre collection  
complète ici :**



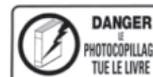
Au fil de la vie du livre,  
retrouvez des éléments correctifs,  
des réponses aux questions d'élèves  
ou des ressources complémentaires ici :



**ISBN : 978-2-311-21292-1**

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

© Vuibert - juillet 2022 - 5, allée de la 2<sup>e</sup> D.B., 75015 Paris - Site Internet : <http://www.vuibert.fr>



# SOMMAIRE



## Ressources numériques

Pour accéder aux ressources numériques en ligne, retrouvez nos codes à flasher tout au long du livre :

- Flashcards d'auto-évaluation interactives
- Scripts Python
- Synthèses à télécharger

## Partie I. MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE SOLIDES INDÉFORMABLES

### Chapitre 1. Analyse des mécanismes - Hyperstatisme

9

Cours, p. 10

1 ► Introduction 10 – 2 ► Hypothèses et notion de modèle 10 – 3 ► Définitions 11 – 4 ► Compléments sur la démarche d'étude 14 – 5 ► Chaînes, boucles et structures hybrides 15 – 6 ► Détermination du degré d'hyperstatisme d'un modèle d'un mécanisme 17 – 7 ► Cas des problèmes plans 21

Fiche de synthèse, p. 22

Exercices, p. 24

Corrigés, p. 45

### Chapitre 2. Principe fondamental de la dynamique

65

Cours, p. 66

1 ► Introduction et positionnement du cours 66 – 2 ► Définitions et hypothèses 68 – 3 ► Dynamique des systèmes de solides indéformables 70 – 4 ► Stratégie de résolution 72 – 5 ► Calcul des quantités dynamiques 73

Fiche de synthèse, p. 80

Exercices, p. 83

Corrigés, p. 109

### Chapitre 3. Énergétique des systèmes de solides indéformables

139

Cours, p. 140

1 ► Justification et limites des méthodes énergétiques 140 – 2 ► Énergie cinétique galiléenne 140 – 3 ► Puissance transmise par une action mécanique extérieure 144 – 4 ► Puissance des inter-efforts entre deux solides 145 – 5 ► Le théorème de l'énergie cinétique 146 – 6 ► Quelques ordres de grandeur 148 – 7 ► Notion de rendement 149

Fiche de synthèse, p. 153

Exercices, p. 156

Corrigés, p. 181

**Chapitre 4. Compléments sur la matrice d'inertie** **197**

Cours, p. 198

1 ► Détermination des moments et produits d'inertie en un point *A* 198 – 2 ► Simplification de la matrice par symétries matérielles 200 – 3 ► Changement du point d'écriture : le théorème de Huygens 203 – 4 ► Inertie par rapport à un axe particulier 204

Fiche de synthèse, p. 206

Exercices, p. 208

Corrigés, p. 213

## Partie II. AUTOMATIQUE

**Chapitre 5. Correction des systèmes asservis** **221**

Cours, p. 222

1 ► Synthèse des correcteurs 222 – 2 ► Architectures fonctionnelles élaborées 237 – 3 ► Les correcteurs numériques 239

Fiche de synthèse, p. 244

Exercices, p. 247

Corrigés, p. 282

**Chapitre 6. Ingénierie numérique** **303**

Cours, p. 304

1 ► Les méthodes de résolution de problèmes numériques 304 – 2 ► Mesure des grandeurs et filtrage 319

Fiche de synthèse, p. 326

Exercices, p. 328

Corrigés, p. 344

**Chapitre 7. Intelligence Artificielle** **361**

Cours, p. 362

1 ► Présentation de l'Intelligence Artificielle (IA) 362 – 2 ► Formalisme des algorithmes 364 – 3 ► Algorithmes les plus utilisés 368 – 4 ► Complément - Méthode de descente du gradient 379

Fiche de synthèse, p. 381

Exercices, p. 385

Corrigés, p. 398

**Chapitre 8. Architectures distribuées et protocoles de communication (PT/PT\*)**  
**405**

Cours, p. 406

1 ► Introduction aux réseaux de communication 406 – 2 ► Caractéristiques des réseaux 408 – 3 ► Description de bus standards 410 – 4 ► TCP/IP 417

Fiche de synthèse, p. 426

Exercices, p. 428

Corrigés, p. 434

## Partie III. CIRCUITS ÉLECTRIQUES ET APPLICATIONS

### Chapitre 9. Sources et circuits électriques 441

Cours, p. 442

1 ► Modélisation des sources et des circuits électriques 442 – 2 ► Grandeurs électriques dans un circuit 446

Exercices, p. 451

Corrigés, p. 455

### Chapitre 10. Modulation de l'énergie électrique 459

Cours, p. 460

1 ► Présentation 460 – 2 ► Structures générales des convertisseurs statiques 461 – 3 ► Les hacheurs 470 – 4 ► Les onduleurs 476

Exercices, p. 484

Corrigés, p. 488

### Chapitre 11. Commande des actionneurs électriques alternatifs 493

Cours, p. 494

1 ► Machine synchrone 494 – 2 ► Machine asynchrone 503

Fiche de synthèse, p. 508

## Partie IV. MATÉRIAUX ET COMPORTEMENT DES STRUCTURES DÉFORMABLES

### Chapitre 12. Matériaux : classification et domaines d'utilisation (PT/PT\*) 511

Cours, p. 511

1 ► Introduction 511 – 2 ► Classification des matériaux 512 – 3 ► Les métaux et leurs alliages 515 – 4 ► Les polymères 523 – 5 ► Les céramiques 525 – 6 ► Les composites 526 – 7 ► L'essai de traction 526

Fiche de synthèse, p. 529

### Chapitre 13. Résistance des matériaux (PT/PT\*) 533

Cours, p. 535

1 ► Introduction 535 – 2 ► Hypothèses et principes fondamentaux de la résistance des matériaux (RdM) 536 – 3 ► Modélisation des liaisons et des actions mécaniques extérieures 539 – 4 ► Modélisation des actions mécaniques intérieures 541 – 5 ► Modélisation des déplacements et des déformations 550 – 6 ► Démarche d'étude des sollicitations simples 553 – 7 ► La traction/compression 554 – 8 ► La torsion des poutres à section circulaire 558 – 9 ► La flexion simple 563 – 10 ► Concentration de contraintes 570 – 11 ► Critères de dimensionnement 572 – 12 ► Structures surcontraintes, dites hyperstatiques 572

Fiche de synthèse, p. 576

Exercices, p. 579

Corrigés, p. 597

### Chapitre 14. Introduction à la démarche de sélection des matériaux (PT/PT\*) 615

Cours, p. 615

1 ► Introduction 615 – 2 ► Démarche de sélection 622

## Chapitre 15. Annexe : caractéristiques géométriques des sections (PT/PT\*) 633

Cours, p. 633

1 ► Centre de section 633 – 2 ► Moments quadratique et quadratique polaire 633 – 3 ► Théorème de Huygens 636 – 4 ► Formulaire 637

Fiche de synthèse, p. 638

### MODE D'EMPLOI

Cet ouvrage a été conçu comme un **outil de révisions** pratique et agréable pour l'élève. Des rubriques, agrémentées de **pictogrammes**, permettent une lecture non linéaire et des **points de repères** visuels.



#### À retenir

Pour réviser et maîtriser les notions et les définitions essentielles du programme. Elles sont à connaître par cœur.



#### Conseils méthodologiques

Pour acquérir les bons réflexes et éviter les pièges.



#### Attention !

Pour mettre en avant les points de vigilance.

D'autres rubriques, **Théorème**, **Proposition**, **Démonstration**, **Remarque**, **Exemple**, **etc.** viennent enrichir les cours et permettent une meilleure appropriation des contenus.

**PARTIE 1**

# **MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE SOLIDES INDÉFORMABLES**





# CHAPITRE 1

## Analyse des mécanismes - Hyperstatisme

### Plan du chapitre

**Cours**, p. 10

- 1 ▶ Introduction, p. 10
- 2 ▶ Hypothèses et notion de modèle, p. 10
- 3 ▶ Définitions, p. 11
- 4 ▶ Compléments sur la démarche d'étude, p. 14
- 5 ▶ Chaînes, boucles et structures hybrides, p. 15
- 6 ▶ Détermination du degré d'hyperstatisme d'un modèle de mécanisme, p. 17
- 7 ▶ Cas des problèmes plans, p. 21

**Fiche de synthèse**, p. 22

**Exercices**, p. 24

**Corrigés**, p. 45



Compétences	Savoir-faire	Exercices correspondants						
		A	B	C	D	E	F	G
<b>Proposer</b> un modèle de connaissance et de comportement	Simplifier un modèle mécanique.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Modifier le modèle pour le rendre isostatique.		✓	✓	✓	✓	✓	✓



RETROUVEZ ICI LES FLASHCARDS  
INTERACTIVES POUR SE TESTER

[www.lienmini.fr/212921-FLASH-1](http://www.lienmini.fr/212921-FLASH-1)



# COURS

## 1 Introduction

Cette partie, *au programme* des filières PSI et PT et *hors programme* pour la filière MP, est consacrée aux formules de détermination de la mobilité  $m$  et du degré d'hyperstatisme  $h$  d'un modèle, notions associées à une démarche connue sous le terme de « théorie des mécanismes ».

### Remarque

Les termes « hyperstaticité » et « isostaticité » sont sémantiquement plus rigoureux mais ils sont moins courants que les termes « hyperstatisme » et « isostatisme » qui seront donc adoptés dans le cours.



### Attention!

Les valeurs de toutes les grandeurs utilisées dans ce cours (nombres de pièces  $N_p$ , de liaisons  $N_L$  ou d'inconnues cinématiques  $N_C$ , mobilité  $m$ , degré d'hyperstatisme  $h$ , etc.) sont entières.

### COMPLÉMENT

Les concepts présentés dans ce cours ont une extension, abordée dans certaines écoles d'ingénieurs et en master, à des concepts faisant appel à des outils mathématiques plus poussés parmi lesquels la théorie des graphes, les complexes de droites et les groupes de Lie.

Ces outils mathématiques, implantés dans des codes de calcul, permettent d'optimiser la conception de certaines structures particulièrement complexes, telles que les robots parallèles où la limitation de la masse des pièces est un véritable enjeu pour l'amélioration des performances dynamiques.

## 2 Hypothèses et notion de modèle

### 2.1. Objectif de l'étude

La *théorie des mécanismes* est une *démarche intellectuelle* permettant d'identifier des propriétés sur un modèle d'un mécanisme. Au niveau des problèmes étudiés en CPGE, l'étude n'est établie que dans le cadre de deux hypothèses strictes au niveau des modèles utilisés :

- Les *modèles* ne sont composés que de *solides indéformables* (ou rigides).
- Les *liaisons* entre les *solides du modèle* sont *parfaites* (donc sans perte énergétique).

Une étude de théorie des mécanismes permet de déterminer deux concepts fondamentaux associés à une modélisation d'un mécanisme : la *mobilité* et le *degré d'hyperstatisme*, quantités assez abstraites dans un premier temps mais qui ont des conséquences très importantes lors des phases de conception et de fabrication des pièces d'un mécanisme (et même pour la simulation de son modèle).

### 2.2. Différence réel/modèle

Pour les études de théorie des mécanismes, la différence entre modèle et réel est fondamentale :

- Il existe *une* réalité, le système étudié, dans son environnement de fonctionnement.
- Il existe *des* modèles, à choisir selon l'objectif d'étude visé.

**Attention!**

Le résultat d'un calcul ou d'une simulation n'est valable que dans le cadre du modèle *choisi*. Sa pertinence vis-à-vis du système réel doit faire l'objet d'une interprétation de l'*écart* entre le résultat obtenu sur le modèle (simulation) et la mesure sur le système réel : si cet écart n'est pas acceptable, une évolution du modèle est nécessaire.

Selon l'objectif de l'étude à mener (mouvements, efforts, contraintes de montage, déformations locales, etc.), les modèles pourront être totalement différents. De plus, pour une même réalité et un même objectif d'étude, différents *niveaux de raffinement* du modèle sont possibles, aboutissant à des modèles plus ou moins complexes et des résultats plus ou moins précis (il faut cependant noter que le modèle le plus complexe et le plus précis n'est pas nécessairement le plus approprié pour une étude donnée).

Cette notion d'écart entre modèle et réalité est doublement importante :

- Les mesures ou observations réalisées sur le mécanisme réel sont une aide au choix d'un modèle : selon le niveau d'observation, ils pourront être très différents.
- Les résultats obtenus par simulation d'un modèle estimé comme pertinent sont une aide à une conception pertinente (résistance, prix, etc.) du mécanisme.

### 3 Définitions

#### 3.1. Mobilité d'un modèle de mécanisme

**Définition 1.1. Mobilité d'un modèle de mécanisme**

Un modèle de mécanisme présente des *mobilités* si des mouvements entre les pièces composant le modèle choisi sont possibles : la mobilité  $m$  correspondant au nombre de mouvements *indépendants* possibles entre les pièces du modèle.

Lorsqu'un modèle du mécanisme est proposé, les choix de modélisation peuvent conduire à certaines mobilités supplémentaires ou supprimées par rapport au mécanisme réel : afin d'analyser rigoureusement le modèle choisi, la mobilité du modèle est généralement décomposée en deux.

**Définition 1.2. Décomposition de la mobilité d'un modèle de mécanisme**

La mobilité  $m$  d'un modèle est généralement décomposée en une mobilité *utile*  $m_u$  et une mobilité *interne*  $m_i$  sous la forme :

$$m = m_u + m_i$$

Cette décomposition n'a qu'une valeur *pédagogique* car, d'un point de vue théorique, les deux types de mobilités jouent évidemment le même rôle.

**Définition 1.3. Mobilité utile**

La *mobilité utile*  $m_u$  correspond aux *mobilités indispensables* du modèle pour que le système modélisé remplisse sa fonction : le nombre d'actionneurs utilisés pour la motorisation du système modélisé permet souvent d'approcher la valeur de  $m_u$ .



#### Définition 1.4. Mobilité interne

La *mobilité interne*  $m_i$  correspond aux *mobilités complémentaires* du modèle non indispensables au fonctionnement du système modélisé : la valeur de  $m_i$  est associée au niveau de raffinement du modèle choisi et dépend donc des choix de modèles de liaison.



#### Conseils méthodologiques

En pratique, le décompte des mobilités se fait en bloquant mentalement, au fur et à mesure, les mobilités identifiées : lorsque le modèle du mécanisme devient immobile, le décompte est terminé. Cette étape, initialement délicate (surtout pour la mobilité interne qui dépend directement du raffinement du modèle choisi), devient assez simple avec de l'entraînement.

## 3.2. Hyperstatisme d'un modèle de mécanisme

Le degré d'hyperstatisme  $h$  d'un modèle d'un mécanisme peut être déterminé de deux manières :

- par une étude géométrique (définition 1.5, explicitement au programme) : cette démarche est toujours possible, que les liaisons soient parfaites ou non;
- ou par une étude en efforts (définition 1.6, non officiellement au programme) : cette démarche est possible uniquement si les liaisons sont *parfaites* au sens énergétique.

Ces deux études sont *équivalentes* dans le cadre des hypothèses présentées à la page 10 et il faut être capable de les utiliser toutes les deux.



#### Attention!

Comme pour la mobilité, la notion d'hyperstatisme ou d'isostatisme est associée au modèle choisi et non au mécanisme lui-même.



#### Définition 1.5. Degré d'hyperstatisme d'un modèle, point de vue géométrique

Dans le cas d'une étude *géométrique*, le degré d'hyperstatisme  $h$  correspond au *nombre de contraintes géométriques de montage* du modèle étudié :

- si  $h = 0$  (modèle isostatique), il n'y a pas de contraintes géométriques de positionnement des pièces composant le modèle du mécanisme;
- si  $h > 0$  (modèle hyperstatique), il apparaît des conditions surabondantes de positionnement des pièces composant le modèle du mécanisme.



#### Définition 1.6. Degré d'hyperstatisme d'un modèle, point de vue des efforts

Dans le cas d'une étude en *efforts*, le degré d'hyperstatisme  $h$  correspond au *nombre d'inconnues d'actions mécaniques ne pouvant être déterminées* par l'application des lois de la statique (PFS) ou de la dynamique (PFD) sur tous les solides composant le modèle étudié (hors le bâti bien évidemment : voir cours correspondants) :

- si  $h = 0$  (modèle isostatique), toutes les inconnues de liaisons peuvent être déterminées par une étude statique (PFS) ou dynamique (PFD);
- si  $h > 0$  (modèle hyperstatique), le système d'équations issu d'une étude statique (PFS) ou dynamique (PFD) comporte plus d'inconnues que d'équations.



**Attention!**

Un modèle comportant des mobilités (soit  $m > 0$ ) peut tout aussi bien être *isostatique* ( $h = 0$ ) ou *hyperstatique* ( $h > 0$ ) : il n'y a donc *aucune corrélation* entre le fait que tout ou partie d'un mécanisme puisse bouger et les contraintes géométriques rencontrées.

La détermination d'un degré d'hyperstatisme positif pour un modèle peut alors conduire :

- soit à une adaptation du modèle pour qu'il soit plus représentatif du mécanisme : modification des modèles de liaison, prise en compte des déformations dans le modèle, etc.;
- soit à des dispositions particulières de conception pour tenir compte des contraintes géométriques de montage identifiées : dispositifs de réglage, maîtrise des jeux, ajout d'éléments souples, etc.

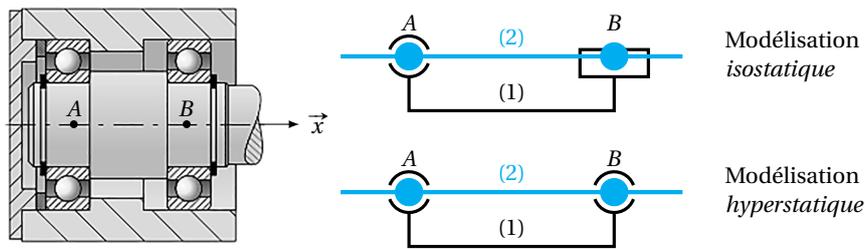
**Remarque**

Il est parfois évoqué la notion de *mécanisme hyperstatique* pour des systèmes présentant des difficultés ou des dispositions particulières de montage ou des systèmes comportant des liaisons supportant des efforts « internes » en l'absence de sollicitations extérieures (cas classique en Résistance des Matériaux étudiée dans la filière PT).

Même si cette notion est largement répandue, il ne faut pas oublier que la quantification du degré d'hyperstatisme ne peut (et doit) être réalisée que dans le cadre d'un *modèle* du mécanisme.

**Exemple**

Deux modèles du guidage d'un arbre (2) par rapport à une pièce (1) par l'intermédiaire de deux roulements à billes sont proposés figure 1.1.



► **Figure 1.1.** Guidage en rotation par roulements à billes : dessin technique et modélisations isostatique et hyperstatique du guidage.

Le premier modèle utilise une liaison sphérique (ou rotule) de centre  $A$  et une liaison sphère-cylindre (ou linéaire annulaire) de centre  $B$  et de direction  $\vec{x}$  : dans ce cas, le modèle est isostatique ( $h = 0$ ) car il n'y a aucune contrainte géométrique de montage.

Le second modèle utilise deux liaisons sphériques (ou rotules) de centres  $A$  et  $B$  : dans ce cas, le modèle est hyperstatique de degré 1 ( $h = 1$ ) car il apparaît une contrainte géométrique sur la distance entre les centres  $A$  et  $B$  qui doit être identique sur les deux pièces.

## 4 Compléments sur la démarche d'étude

### 4.1. Buts de l'étude de la mobilité et de l'hyperstatisme

L'estimation des valeurs de la mobilité  $m$  et du degré d'hyperstatisme  $h$  d'un modèle de mécanisme est utile dans le cadre de différents objectifs d'étude.

#### Conception des mécanismes

La valeur du degré d'hyperstatisme  $h$ , associée à une modélisation géométrique d'un mécanisme, permet de donner une idée du nombre de contraintes géométriques de montage sur le système modélisé. Si  $h > 0$ , il est possible de proposer des modifications du modèle géométrique permettant de le rendre isostatique et limiter par conséquent les conditions de montage.

En filière PT, cette analyse peut conduire à corriger la conception du mécanisme, ou à spécifier les tolérances de fabrication permettant d'assurer le montage des pièces composant le mécanisme réel.

#### Étude cinématique

La valeur de la mobilité  $m$  permet de connaître le nombre de paramètres cinématiques indépendants à imposer pour définir complètement le mouvement. Dans le cas d'une résolution informatique, il est alors nécessaire de définir autant de mouvements indépendants que de mobilités identifiées.

#### Études en efforts (statique ou dynamique)

La valeur du degré d'hyperstatisme  $h$ , associée à une modélisation statique ou dynamique d'un mécanisme, permet de savoir si le problème admet une solution unique et de donner une idée du nombre d'actions mécaniques ne pouvant être déterminées.

Lorsque le modèle est isostatique, le calcul des actions mécaniques transmises par les liaisons admet une solution unique. Ce n'est pas le cas lorsque le modèle est hyperstatique : il est, dans ce cas, parfois dit *statiquement indéterminé*. Certains logiciels de simulation ne peuvent résoudre de tels cas, considérés comme étant « mal posés » du point de vue des efforts et il est nécessaire de modifier le modèle pour le rendre isostatique.

Lorsque le système réel contient de nombreuses contraintes de montage (cas des structures en béton précontraint par exemple), il devient nécessaire de tenir compte, dans le modèle, de la déformation des composants, en la modélisant par les lois de résistance des matériaux (RdM) ou de comportement des éléments de liaisons (roulements à billes par exemple).

### 4.2. Avantages et inconvénients d'une solution isostatique ou hyperstatique

Une solution technique isostatique, donc sans contrainte géométrique, est dans la plupart des cas recherchée. Dans ce cas, en effet, les conditions de montage sont relativement larges puisque d'un point de vue du modèle, il n'y a qu'une surface de contact par mouvement bloqué et les petits défauts de fabrication ne compromettent pas le montage.

Au contraire, une solution technique hyperstatique, donc contrainte géométriquement, conduit à bloquer plusieurs fois un même mouvement par plusieurs contacts surfaciques : il faut alors assurer une excellente localisation des surfaces ou prévoir un dispositif de réglage pour ne pas compromettre le montage. Le coût de réalisation est alors généralement plus important que pour une solution non contrainte géométriquement.

Lorsque les contacts sont surabondants, la solution technique est plus rigide, et donc souvent plus robuste, ce qui est particulièrement utile lorsque certaines pièces sont naturellement trop déformables à cause du matériau utilisé ou de leur forme (structure élancée par exemple).

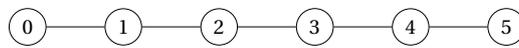
Les solutions hyperstatiques, donc surcontraintes géométriquement, sont ainsi employées :

- pour supprimer les jeux dans les liaisons en imposant une précharge (montage par rouleaux coniques par exemple) ;
- lorsque les efforts ou la rigidité requise sont si importants qu'il faut plusieurs liaisons en parallèle pour les supporter (machines outils par exemple).

## 5 Chaînes, boucles et structures hybrides

### 5.1. Cas des chaînes (ou chaînes ouvertes)

Dans une chaîne (voir figure 1.2), il n'y a évidemment *aucune contrainte géométrique de montage* car les solides sont placés les uns après les autres.

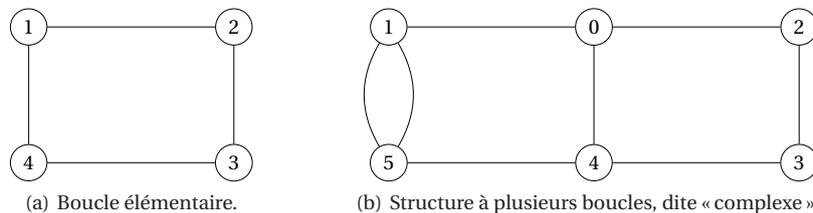


► Figure 1.2. Structure de chaîne (ou « chaîne ouverte »).

Dans ce cas, le degré d'hyperstatisme du modèle est nécessairement nul, soit  $h = 0$  et la mobilité est égale à la somme des degrés de liberté des liaisons intermédiaires.

### 5.2. Cas des boucles (ou chaînes fermées)

Dans une structure comportant des boucles (voir figure 1.3), *il peut exister des contraintes géométriques de montage* car les solides sont placés les uns par rapport aux autres, ce qui implique des conditions géométriques difficiles à satisfaire.

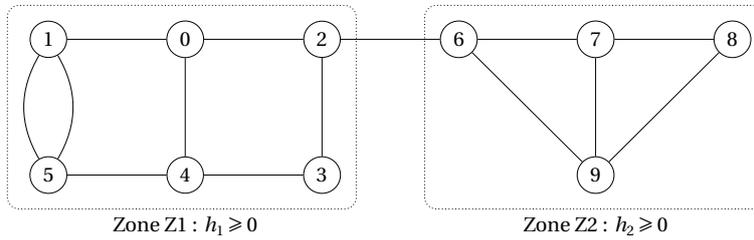


► Figure 1.3. Structures de boucles (ou « chaînes fermées ») simple et complexe.

Dans ce cas, le degré d'hyperstatisme de la modélisation peut être non nul, soit  $h \geq 0$ .

### 5.3. Cas des structures dites « hybrides »

Dans le cas d'une modélisation contenant des chaînes et des boucles, parfois appelée « hybride », les parties comportant des boucles seront étudiées indépendamment soit, dans le cas de la figure 1.4, un degré d'hyperstatisme  $h = h_1 + h_2$ .



► **Figure 1.4.** Structure dite « hybride » de degré d'hyperstatisme  $h = h_1 + h_2$ .

### 5.4. Nombre cyclomatique d'un modèle de mécanisme

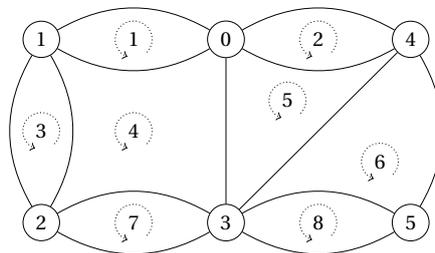


#### Loi 1.7. Nombre cyclomatique

La théorie des graphes permet de montrer que le nombre de cycles indépendants du modèle est donné par la formule (à admettre) :

$$\gamma = N_L - N_p + 1$$

où  $N_p$  est le nombre de pièces et  $N_L$  est le nombre de liaisons du modèle.



► **Figure 1.5.** Graphe des liaisons de nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 13 - 6 + 1 = 8$ , soit 8 boucles indépendantes (par exemple celles indiquées sur la figure).



#### Définition 1.8. Fermeture cinématique

La fermeture cinématique sur une boucle correspond à l'écriture de la composition des mouvements, donc la somme des torseurs cinématiques, sur la boucle.

Ainsi, sur la boucle (0)–(1)–(2)–(3)–(0) de la figure 1.5, cette fermeture s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{\mathcal{V}_{3/0}\} \iff \begin{cases} \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{\Omega}_{3/0} \\ \vec{V}_{M,3/2} + \vec{V}_{M,2/1} + \vec{V}_{M,1/0} = \vec{V}_{M,3/0} \quad \forall M \end{cases}$$

Une fermeture cinématique permet d'aboutir à 6 équations scalaires dans le cas d'une étude tridimensionnelle et 3 équations équations scalaires dans le cas d'une étude plane.

**Loi 1.9. Relation entre le nombre cyclomatique et les équations scalaires**

La valeur de  $\gamma$  correspond au nombre de boucles indépendantes dans le graphe des liaisons : et elle correspond donc également au nombre de fermetures cinématiques indépendantes pouvant être écrites sur le modèle étudié ce qui implique :

- $E_C = 6\gamma$  équations scalaires dans le cas de modélisations tridimensionnelles.
- $E_C = 3\gamma$  équations scalaires dans le cas de modélisations planes.

**Remarque**

Dans la suite, et afin de faciliter la lecture, la modélisation adoptée est supposée tridimensionnelle : le cas des problèmes plans est présenté à la fin.

## 6 Détermination du degré d'hyperstatisme d'un modèle d'un mécanisme

### 6.1. Approche cinématique

#### 6.1.1. Notations

Les notations suivantes seront utilisées dans les formules.

- $N_p$  : nombre de pièces du modèle ( $\gamma$  compris le bâti).
- $N_L$  : nombre total de liaisons du modèle.
- $n_C$  : degré de liberté d'une liaison, soit le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison.
- $N_C = \sum n_{Ci}$  : nombre d'inconnues cinématiques du modèle.

#### 6.1.2. Mobilité

L'écriture de la fermeture cinématique sur chacune des  $\gamma$  boucles indépendantes du modèle permet d'obtenir  $E_C = 6\gamma$  équations scalaires qu'il est possible d'écrire sous la forme matricielle :

$$[C] \cdot [X] = [0]$$

- $[X]$  est le vecteur formé par les  $N_C$  inconnues cinématiques du modèle correspondant aux éléments des torseurs cinématiques des différentes liaisons.
- $[C]$  est une matrice de  $E_C = 6\gamma$  lignes et  $N_C$  colonnes.

Après combinaisons linéaires des  $E_C = 6\gamma$  équations issues des fermetures cinématiques sur les  $\gamma$  boucles, la matrice  $[C]$  peut s'écrire sous la forme de la figure 1.6.

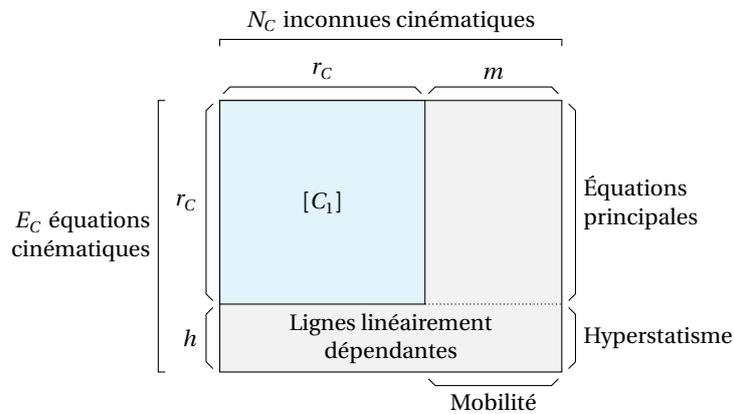
**Définition 1.10. Mobilité : point de vue cinématique (conseillé)**

La mobilité  $m$  est définie par :

$$m = N_C - r_C \geq 0$$

où  $r_C$  correspond au rang de la matrice  $[C]$ , donc du système de  $E_C = 6\gamma$  équations issues de l'écriture des fermetures cinématiques sur les  $\gamma$  boucles indépendantes du modèle.

En considérant cette définition, la mobilité  $m$  correspond au nombre de paramètres cinématiques à imposer afin d'obtenir une solution unique à l'étude cinématique.



► **Figure 1.6.** Identification de la mobilité  $m$  et de l'hyperstatisme  $h$  d'un modèle à partir de l'analyse de la structure de la matrice  $[C]$  issue de l'étude cinématique.

Le rang de la matrice  $[C]$  donne donc la valeur de la mobilité du modèle et donc du mécanisme si le modèle adopté est supposé cohérent.

Si  $N_C = r_C$ , le système homogène obtenu par l'étude cinématique présente autant d'inconnues cinématiques que d'équations indépendantes. La seule solution est donc la nullité de toutes les inconnues. Dans ce cas, le mécanisme ainsi modélisé est immobile, sans possibilité de mouvement de toute sous-partie, ce qui correspond bien à une mobilité nulle, soit  $m = 0$ .

Si  $N_C > r_C$ , le système homogène obtenu par l'étude cinématique présente plus d'inconnues cinématiques que d'équations indépendantes. Il existe donc une infinité de solutions. Il faut donc fixer un certain nombre de paramètres pour connaître les autres, ce qui induit que des mouvements existent dans le modèle du mécanisme, globalement ou dans ses sous-parties.

### 6.1.3. Calcul du degré d'hyperstatisme d'un modèle



#### Définition 1.11. Formule cinématique de détermination de $h$

Le degré d'hyperstatisme  $h$  correspond au déficit d'équations « utilisables » pour l'étude cinématique. Il se définit donc sous la forme (voir figure 1.6) :

$$h = E_C - r_C$$

avec :

- $E_C = 6\gamma$  : nombre maximal d'équations scalaires issues de l'écriture des fermetures cinématiques sur les  $\gamma$  boucles.
- $r_C \leq E_C$  : rang de ce même système.

En introduisant la définition de la mobilité  $m = N_C - r_C$  dans la formule  $h = E_C - r_C$ , on obtient :

$$h = 6\gamma + m - N_C$$

#### Remarque

Avec la démarche précédente, il apparaît que toute ligne linéairement dépendante des équations principales dans le système obtenu par l'écriture des fermetures cinématiques augmente le degré d'hypersta-

tisme à cause de la perte d'une information sur le positionnement relatif de deux pièces, ce qui correspond en pratique à une contrainte géométrique dans le modèle.

## 6.2. Approche en efforts (non officiellement au programme)

### 6.2.1. Notations

Les notations complémentaires suivantes seront utilisées dans les formules.

- $n_s$  : degré de liaison d'une liaison, soit le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par la liaison.
- $N_s = \sum n_{s_i}$  : nombre d'inconnues d'actions mécaniques de liaison du modèle.

Comme indiqué dans les hypothèses page 10, les liaisons dans le modèle sont supposées *parfaites* donc sans perte énergétique : dans ce cas,  $n_s + n_c = 6$  pour chaque liaison, soit, pour l'ensemble des  $N_L$  liaisons entre les  $N_p$  pièces composant le modèle du mécanisme :

$$N_s + N_c = 6N_L$$

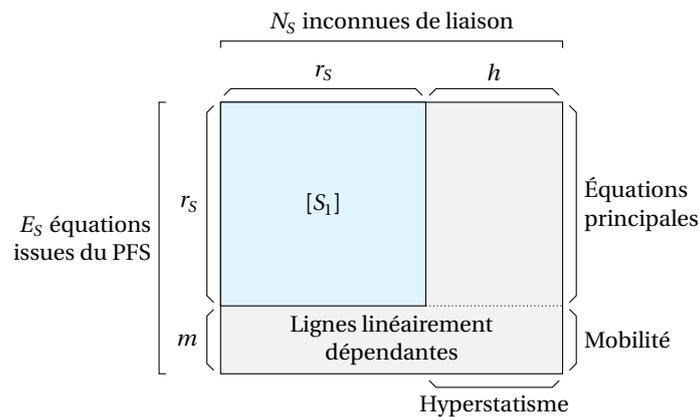
### 6.2.2. Mobilité

L'écriture des conditions d'équilibre (PFS) sur les  $N_p - 1$  pièces mobiles composant le modèle du système étudié (toutes les pièces sauf le bâti) permet d'obtenir des équations scalaires qu'il est possible d'écrire sous la forme matricielle :

$$[S] \cdot [Y] + [F] = [0]$$

- $[Y]$  est le vecteur formé par les  $N_s$  inconnues de liaison du modèle correspondant aux éléments des torseurs des actions mécaniques transmissibles par les différentes liaisons.
- $[S]$  est une matrice de  $E_s = 6(N_p - 1)$  lignes et  $N_s$  colonnes.
- $[F]$  correspond au vecteur formé par les actions mécaniques extérieures (poids, couple moteur, etc.) ou intérieures (ressort, pression d'huile dans le vérin, etc.).

Après combinaisons linéaires des  $E_s = 6(N_p - 1)$  équations issues de l'étude de l'équilibre des  $N_p - 1$  pièces (toutes, sauf le bâti), la matrice  $[S]$  peut s'écrire sous la forme de la figure 1.7.



► **Figure 1.7.** Identification de la mobilité  $m$  et de l'hyperstatisme  $h$  d'une modélisation à partir de l'analyse de la structure de la matrice  $[S]$  issue de l'étude statique.

**Remarque**

Dans le cas d'une étude dynamique, cette équation s'écrit  $[S] \cdot [Y] + [F] = [D]$  avec  $[D]$  correspondant au torseur dynamique : voir partie de cours correspondante.



**Définition 1.12. Mobilité : point de vue en effort (pour information)**

La mobilité  $m$  est définie par :

$$m = E_S - r_S \geq 0$$

où  $r_S$  correspond au rang de la matrice  $[S]$ , donc du système de  $E_S = 6(N_p - 1)$  équations issues de l'écriture des conditions d'équilibre sur les  $N_p - 1$  pièces mobiles du modèle (ce qui correspond à l'ensemble des pièces du modèle sauf le bâti).

En considérant sa définition, la mobilité  $m$  correspond au nombre d'équations nulles, donc non utilisables, dans l'étude des conditions d'équilibre.

Le rang de la matrice  $[S]$  donne donc la valeur de la mobilité du modèle et donc du mécanisme si le modèle adopté est supposé cohérent.

6.2.3. Calcul du degré d'hyperstatisme d'un modèle



**Définition 1.13. Formule statique de détermination de  $h$**

Le degré d'hyperstatisme correspond au déficit d'équations « utilisables » pour l'étude statique. Il se définit donc sous la forme (voir figure 1.7) :

$$h = N_S - r_S$$

avec :

- $N_S$  : nombre d'inconnues de liaison du modèle étudié.
- $r_S$  : rang du système de  $E_S = 6(N_p - 1)$  équations obtenues par l'écriture des conditions d'équilibre des  $N_p - 1$  pièces mobiles (donc toutes les pièces sauf le bâti).

En introduisant la définition de la mobilité  $m = E_S - r_S$  dans la formule  $h = N_S - r_S$ , on obtient :

$$h = N_S + m - 6(N_p - 1)$$

6.2.4. Relation entre les formules de détermination

Dans le cas d'un modèle à base de liaisons parfaites (donc sans pertes),  $n_C + n_S = 6$  pour chaque liaison, soit, pour l'ensemble des  $N_L$  liaisons composant le modèle  $N_C + N_S = 6N_L$ .

Comme par ailleurs le nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1$ , il est possible de vérifier la cohérence relative des formules obtenues par l'étude cinématique et l'étude statique :

$$\underbrace{h = 6\gamma + m - N_C}_{\text{formule cinématique}} \rightarrow h = 6 \underbrace{(N_L - N_p + 1)}_{\gamma} + m - \underbrace{(6N_L - N_S)}_{N_C} \rightarrow \underbrace{h = N_S + m - 6(N_p - 1)}_{\text{formule statique}}$$

## 7 Cas des problèmes plans

Un problème utilisant une modélisation plane pour une étude de théorie des mécanismes correspond à une *dégradation* d'un modèle tridimensionnel en ne conservant que certaines informations :

- Point de vue géométrique : seule la rotation selon la direction normale et les déplacements dans le plan sont considérés, soient au maximum 3 équations scalaires pour chaque fermeture cinématique (au lieu de 6 pour les problèmes tridimensionnels).
- Point de vue en efforts : seules les composantes dans le plan de la résultante et la composante selon la direction normale au plan du moment sont considérés, soient au maximum 3 équations scalaires pour chaque écriture des conditions d'équilibre d'une pièce (au lieu de 6 pour les problèmes tridimensionnels).

Les formules de détermination sont identiques à celles obtenues dans les études tridimensionnelles mais avec 3 au lieu de 6 : voir tableau 1.1.

**Tableau 1.1.** Formules de détermination : cas 3D et cas 2D.

	Point de vue géométrique	Point de vue en efforts
Modélisation 3D	$h = 6\gamma + m - N_C$	$h = N_S + m - 6(N_P - 1)$
Modélisation 2D	$h = 3\gamma + m - N_C$	$h = N_S + m - 3(N_P - 1)$

# FICHE SYNTHÈSE

## Hypothèse fondamentale des études

Dans toutes les études de théorie des mécanismes abordées en CPGE, les *modèles de liaisons utilisés seront supposés parfaits*, notion à comprendre au sens *énergétique*, donc sans perte.

Dans ce cas d'étude, on rappelle il y a *orthogonalité* des mouvements et des actions mécaniques transmissibles par la liaison, ce qui signifie qu'il n'y a pas de transmission d'effort dans les directions où un mouvement relatif est possible : dans ce cas, le degré de liberté  $n_C$  et le degré de liaison  $n_S$  d'une liaison sont liés par la formule  $n_C + n_S = 6$  (modèle 3D) ou  $n_C + n_S = 3$  (modèle 2D).

## Grandeurs utilisées pour les études

Les notations suivantes seront utilisées pour les grandeurs qui apparaissent dans les formules.

- $N_p$  : nombre de pièces du modèle, y compris le bâti;
- $N_L$  : nombre de liaisons du modèle, y compris celles avec le bâti;
- $n_{Ci}$  : degré de liberté d'une liaison  $\mathcal{L}_i$ , nombre d'inconnues cinématiques de la liaison;
- $N_C = \sum n_{Ci}$  : nombre d'inconnues cinématiques du modèle composé de  $N_L$  liaisons;
- $n_{Si}$  : degré de liaison d'une liaison  $\mathcal{L}_i$ , nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par la liaison avec  $n_{Si} + n_{Ci} = 6$  pour une liaison parfaite;
- $N_S = \sum n_{Si}$  : nombre d'inconnues d'actions mécaniques de liaison du modèle avec, pour une liaison parfaite,  $N_S + N_C = 6N_L$ .

Toutes les grandeurs utilisées pour les études sont entières.

## Nombre cyclomatique d'un modèle de mécanisme

Le nombre de boucles indépendantes dans le modèle est déterminé par le nombre cyclomatique :

$$\gamma = N_L - N_p + 1$$

## Mobilité d'un modèle de mécanisme

La mobilité  $m$  correspond au nombre de relations indépendantes entre les paramètres cinématiques du modèle du mécanisme et elle s'évalue par la somme de deux mobilités déterminées indépendamment :

$$m = m_u + m_i$$

Ces deux mobilités ont des sens différents :

- La mobilité « utile »  $m_u$  correspond au nombre de paramètres cinématiques à imposer pour résoudre le système d'équations cinématiques : l'analyse du nombre d'actionneurs permet souvent d'approcher sa valeur.
- La mobilité « interne »  $m_i$  correspond au nombre de mouvements internes indépendants possibles alors même que les paramètres d'entrée et de sortie sont maintenus à une valeur nulle, donc sans mouvement associé.

**Degré d'hyperstatisme d'un modèle de mécanisme tridimensionnel**

Le degré d'hyperstatisme  $h$  d'un modèle peut être déterminé par une étude cinématique (à privilégier) ou par une étude en effort (valable uniquement dans le cas de liaisons parfaites, donc sans pertes).

Ces deux méthodes sont équivalentes dans le cadre de l'hypothèse de liaisons parfaites (à prendre en l'absence d'indication explicite) et doivent toutes deux être maîtrisées.

**Formule de détermination du degré d'hyperstatisme dans le point de vue géométrique**

Le degré d'hyperstatisme  $h$  correspond au nombre de contraintes géométriques de montage du modèle et il se calcule par la formule suivante, issue des fermetures cinématiques sur les  $\gamma$  boucles du modèle :

$$h = 6\gamma + m - N_C \text{ (modèle 3D)} \quad \text{ou} \quad h = 3\gamma + m - N_C \text{ (modèle 2D)}$$

**Formule de détermination dans le point de vue en efforts**

Le degré d'hyperstatisme  $h$  correspond au nombre d'inconnues d'actions mécaniques ne pouvant être déterminées par l'étude des conditions d'équilibre de toutes les pièces mobiles, donc toutes les pièces du modèle hors le bâti et il se calcule par la formule suivante, issue de l'étude de l'équilibre (PFS) sur les  $N_p - 1$  pièces du modèle (soit toutes les pièces, sauf le bâti) :

$$h = N_S + m - 6(N_p - 1) \text{ (modèle 3D)} \quad \text{ou} \quad h = N_S + m - 3(N_p - 1) \text{ (modèle 2D)}$$

**Remarques importantes****Démarche analytique**

Au niveau des épreuves de concours, la mise en œuvre d'une étude analytique (fermetures cinématiques sur chacune des boucles ou écriture des conditions d'équilibre sur toutes les pièces hors le bâti) et la détermination du rang du système d'équations est à proscrire et n'est d'ailleurs jamais attendue !

**Association au modèle**

Le degré de mobilité  $m$  et le degré d'hyperstatisme  $h$  sont liés au modèle étudié et non au mécanisme modélisé : à un mécanisme donné peuvent en effet correspondre plusieurs modèles, avec chacun des degrés de mobilité et d'hyperstatisme différents.

**Structures**

Dans le cas d'une structure en chaîne, aussi appelée « chaîne ouverte », le degré d'hyperstatisme est systématiquement nul car il n'y a aucune contrainte géométrique de montage.

Dans le cas d'une structure comportant des boucles, aussi appelées « chaînes fermées », le degré d'hyperstatisme  $h$  pourra être non nul car ces boucles peuvent induire des contraintes géométriques de montage.



RETROUVEZ ICI LA SYNTHÈSE  
DE CE CHAPITRE À TÉLÉCHARGER

[www.lienmini.fr/212921-SYNTH-1](http://www.lienmini.fr/212921-SYNTH-1)



# EXERCICES

## Vrai ou Faux

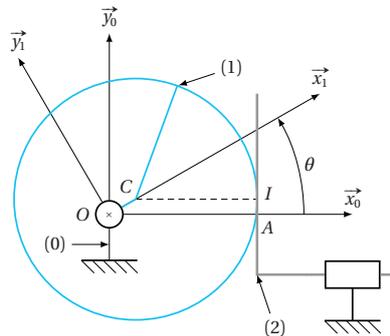
	Vrai	Faux
a) Un système mobile ( $m > 0$ ) a nécessairement un modèle isostatique ( $h = 0$ ).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) Le nombre cyclomatique $\gamma$ est lié au nombre d'équations obtenues par une étude cinématique sur le modèle proposé.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Le nombre cyclomatique $\gamma$ est lié au mécanisme modélisé.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Le degré de liberté $n_c$ et de liaison $n_s$ d'une liaison parfaite sont liés.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Le degré d'hyperstatisme $h$ d'une chaîne (aussi appelée chaîne ouverte) est obligatoirement nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f) Le degré d'hyperstatisme $h$ d'une boucle (aussi appelée chaîne fermée) est obligatoirement non nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
g) La formule $h = 6\gamma + m - N_C$ permet de calculer le nombre d'inconnues d'actions mécaniques ne pouvant être déterminées par une étude statique (PFS) ou dynamique (PFD) sur le modèle du mécanisme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
h) La formule $h = N_S + m - 6(N_p - 1)$ est toujours utilisable pour calculer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Exercices d'application



### EXERCICE 1 Mécanisme de transformation de mouvement

Le modèle de la figure 1.8 correspond à un mécanisme de transformation de mouvement par cylindre excentré, donc tournant autour d'un point décalé de son axe de symétrie : l'entrée est la rotation de la pièce (1), de forme cylindrique d'axe  $(C, \vec{z}_1)$ , par rapport au bâti (0) et la sortie est la translation de la pièce (2), comportant une surface plane en contact avec le cylindre (1) par rapport au bâti (0).



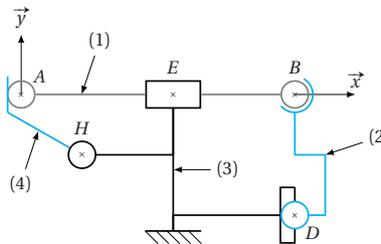
► Figure 1.8. Modèle d'un mécanisme à excentrique.

- 1) Après avoir proposé un modèle de liaison tridimensionnel raisonnable pour le contact entre les pièces (1) et (2), préciser les mobilités (utiles et internes), les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et le nombre de cycles indépendants puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 2) Identifier la(les) contrainte(s) mise(s) en évidence par ce calcul précédent en choisissant de la(les) placer au niveau du contact entre le cylindre (1) et le plateau (2). Proposer une évolution du modèle de liaison entre (1) et (2) afin de rendre le modèle isostatique.
- 3) Que devient ce modèle dans le plan? Déterminer alors le degré d'hyperstatisme de cette évolution. Que peut-on en conclure par rapport à la modélisation tridimensionnelle?



### EXERCICE 2 Mécanisme de serrage

Le modèle de la figure 1.9 correspond à un mécanisme de serrage. Le pivotement de la pièce (4) permet de déplacer la pièce (2) à la fois en rotation et en translation.



► Figure 1.9. Mécanisme de serrage.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation.
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.

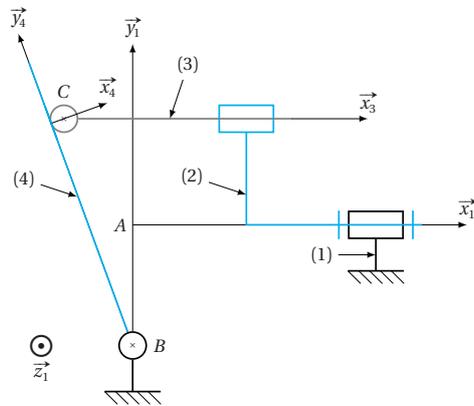


### EXERCICE 3 Pompe à pistons

La modélisation d'une pompe à pistons plongeurs est fournie figure 1.10 (dans ce modèle, un seul piston (3) a été représenté mais il en existe généralement plusieurs afin d'assurer un débit moyen peu fluctuant). Dans ce type de pompe, la rotation de la pièce (2) par rapport au bâti (1) entraîne une translation du piston (3) par rapport à la pièce (2) par le contact du piston (3) avec le plateau incliné (4), ce qui permet d'aspirer et de refouler un fluide.

L'amplitude de la translation du piston étant directement liée à l'inclinaison de (4), un mécanisme (non représenté) permet d'incliner le plateau (4) par rapport au bâti (1), ce qui modifie ainsi l'amplitude de la translation du piston (3) par rapport à la pièce (2) et ainsi la valeur du débit de la pompe.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation.
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.

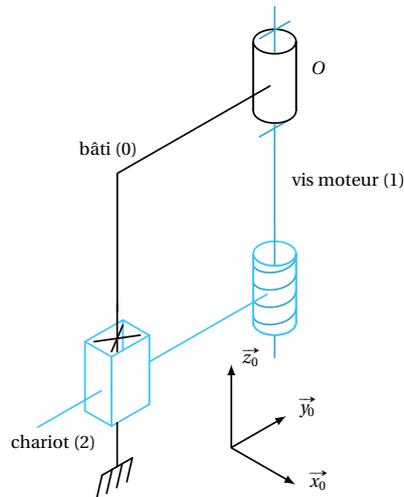


► Figure 1.10. Pompe à pistons.



#### EXERCICE 4 Mécanisme élévateur

Le modèle de la figure 1.11 représente un mécanisme élévateur : dans ce système, la mise en rotation de la vis moteur (1) par un moteur permet de mettre en mouvement le chariot (2) selon la direction verticale.

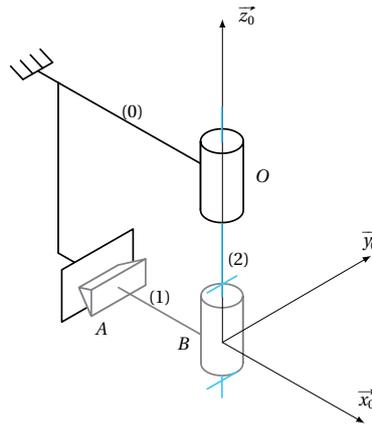


► Figure 1.11. Modèle d'un mécanisme élévateur.

- 1) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 2) Préciser les contraintes géométriques au niveau de la liaison hélicoïdale et proposer une évolution de la zone autour de cette liaison hélicoïdale afin de rendre le modèle isostatique (il sera nécessaire de rajouter une ou plusieurs pièces afin de conserver la transformation de mouvement par la liaison hélicoïdale).

**EXERCICE 5 Machine de traction-torsion**

La structure de sollicitation d'une machine de traction-torsion est modélisée figure 1.12. L'actionneur (2) possède 2 degrés de liberté (1 en translation et 1 en rotation), d'où le modèle pivot glissant adopté.

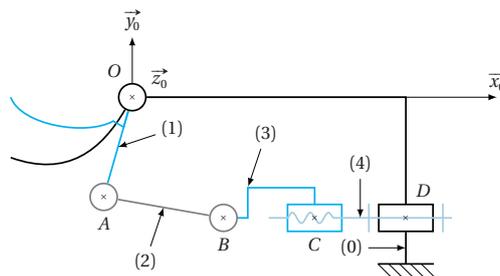


► Figure 1.12. Modèle d'une machine de traction-torsion.

- 1) Tracer le graphe des liaisons en précisant les caractéristiques géométriques des différentes liaisons.
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 3) Préciser les contraintes géométriques et proposer une liaison à ajouter entre (0) et (2), en amont de la pivot glissant, pour rendre le modèle isostatique.

**EXERCICE 6 Sécateur électrique**

Un modèle géométrique d'un sécateur électrique est fourni figure 1.13. L'entrée est la rotation de l'axe (4) par rapport au bâti (0) et la sortie est la rotation de la lame (1) par rapport au bâti (0).

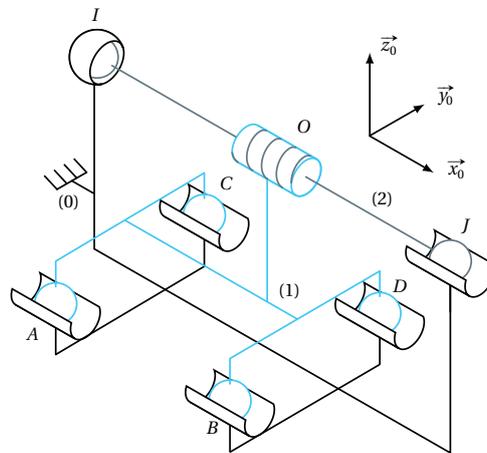


► Figure 1.13. Sécateur.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation.
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 3) Préciser les contraintes géométriques au niveau de la liaison en  $A$  (et en  $B$ ) et proposer une évolution du modèle pour le rendre isostatique tout en étant encore fonctionnel, ce qui implique que la rotation de  $(4)/(0)$  doit continuer à entraîner celle de  $(1)/(0)$ .

### EXERCICE 7 Table de translation

Une table de translation est modélisée figure 1.14 et, sur ce système, l'axe (2) est motorisé en rotation.



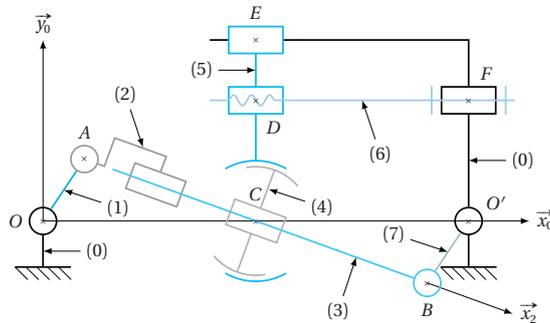
► Figure 1.14. Modèle d'une table de translation.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation.
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 3) Après avoir identifié des contraintes géométriques correspondant à ce degré d'hyperstatisme, proposer des évolutions du modèle pour le rendre isostatique.

### EXERCICE 8 Variateur de vitesse

Un variateur de vitesse est modélisé figure 1.15. Dans ce système, l'axe (6) est motorisé pour réaliser le réglage et l'axe (1) est motorisé pour obtenir le mouvement souhaité.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation.
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 3) Identifier des contraintes géométriques correspondant à ce degré d'hyperstatisme (il n'est pas demandé de proposer d'évolution du modèle pour le rendre isostatique).



► Figure 1.15. Variateur de vitesse mécanique.

## Exercices d'approfondissement



### EXERCICE A Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée

L'amélioration de la mobilité des personnes âgées ou rencontrant des troubles de la marche est un des enjeux majeurs de l'assistance à la personne et un dispositif d'assistance à la marche peut être prescrit lors de l'apparition de troubles de la locomotion. Parmi les nombreux dispositifs pouvant être utilisés, la canne et le déambulateur demeurent les plus utilisés, l'utilisation de la canne étant privilégiée lors de troubles mineurs ou n'affectant qu'une seule des deux jambes. Afin de contribuer à l'amélioration de l'assistance apportée par ces deux dispositifs, leur robotisation a été entreprise.

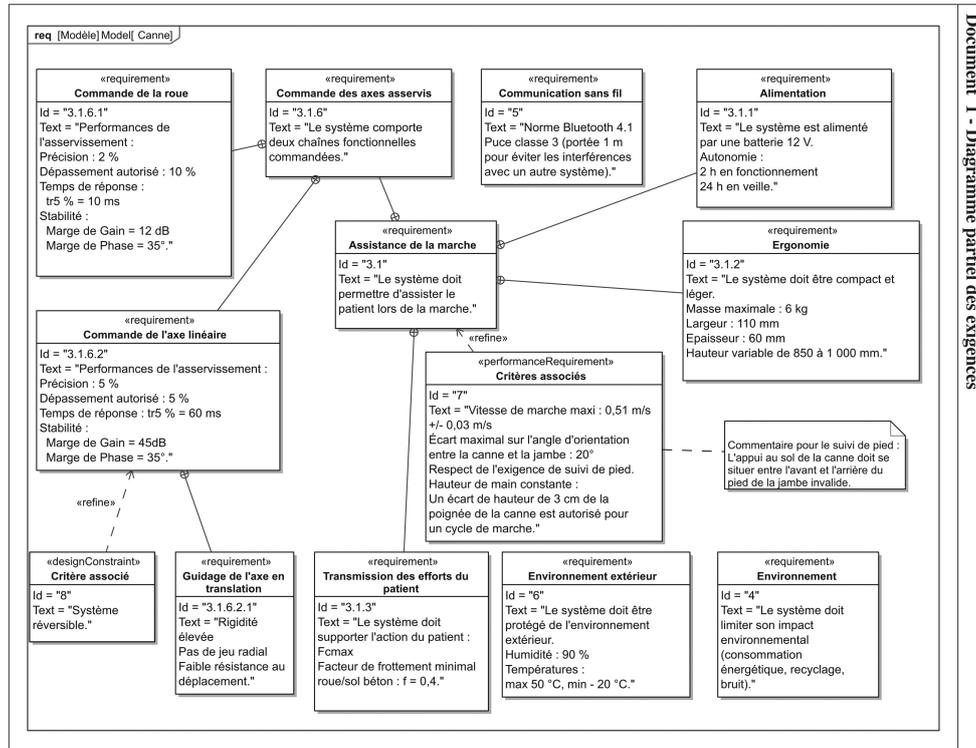
Si de nombreux déambulateurs robotisés ont ainsi été conçus afin d'offrir une assistance continue lors de la marche, le développement des cannes robotisées s'est, en revanche, traduit par une différenciation marquée par rapport aux cannes conventionnelles (figure 1.16) car l'utilisation de bases mobiles stables sur lesquelles sont fixées des cannes conduit à l'obtention de dispositifs encombrants.

Canne conventionnelle	Canne à base mobile stable composée de trois roues	Prototypage de canne robotisée (système étudié dans ce sujet)

► Figure 1.16. Évolution des dispositifs d'assistance à la locomotion de type canne.

Pour plus de compacité et pour garder les attributs d'une canne conventionnelle, le prototype de canne étudié est composé d'un axe télescopique et d'une roue à son extrémité, tous deux motorisés : il conserve ainsi un encombrement réduit et permet de synchroniser les mouvements avec le cycle de la marche. La canne suit ainsi activement le mouvement de la jambe « invalide » durant la phase de balancement et offre un point stable pendant la phase d'appui.

Quelques exigences relatives au système proposé sont listées dans le diagramme des exigences (*Requirement Diagram*, identifiant **req** du langage de modélisation SysML) de la figure 1.17.



Document 1 - Diagramme partiel des exigences

► Figure 1.17. Diagramme partiel des exigences de la canne robotisée.

Les solutions technologiques retenues pour la transformation de mouvement et le guidage de l'axe linéaire sont fournies figure 1.18. Le dispositif vis/écrou à billes permet la transformation du mouvement de rotation de la vis (4) en translation de l'écrou lié à (3). Le guidage en translation de la canne supérieure (3) par rapport à la canne inférieure (2) est assuré par deux axes de guidage avec douilles à billes placés en parallèle.

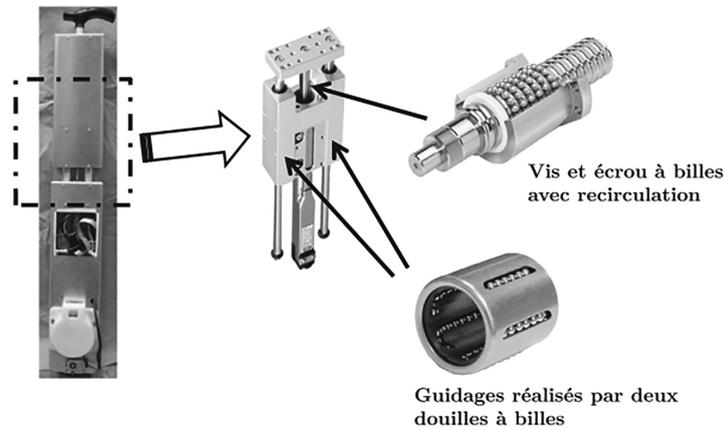
- 1) Citer les exigences qui peuvent être vérifiées partiellement ou totalement par l'utilisation des éléments roulants dans la réalisation des liaisons de cette partie du système.

Le modèle cinématique retenu pour la transformation de mouvement et du guidage de l'axe linéaire est donné figure 1.19.

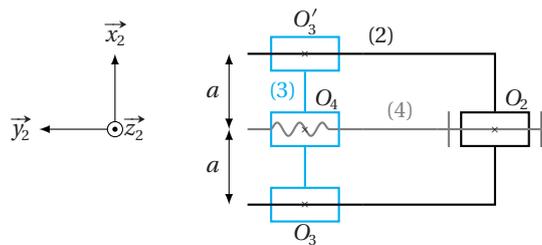
- 2) Tracer le graphe des liaisons en se limitant aux pièces (2), (3) et (4) puis déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.

Ce modèle est fortement hyperstatique et on se propose d'analyser uniquement les contraintes géométriques liées au guidage en translation de (3) par rapport à (2).

- 3) En se limitant aux contraintes géométriques liées au guidage en translation de (3) par rapport à (2), préciser les conditions géométriques (longueur et/ou orientation) à respecter pour assurer ce guidage dans de bonnes conditions.
- 4) Donner un avantage et un inconvénient d'avoir un tel hyperstatisme sur ce guidage en translation.
- 5) Proposer une modification du modèle pour rendre ce guidage en translation isostatique.



► **Figure 1.18.** Solutions technologiques retenues pour la transformation de mouvement et le guidage de l'axe linéaire

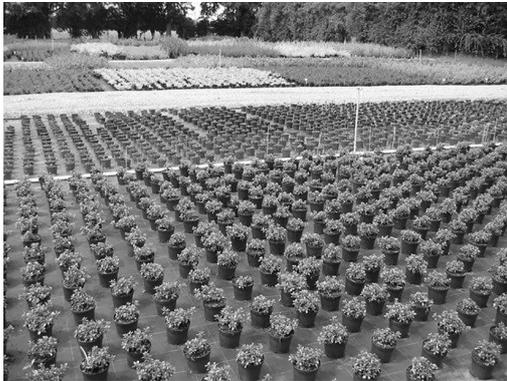


► **Figure 1.19.** Modèle cinématique de la transformation de mouvement et du guidage de l'axe linéaire.

● ● ● **EXERCICE B Robot Trooper**

En culture hors-sol (voir figure 1.20), il faut constamment déplacer les pots pour profiter de la lumière, pour regrouper les cultures, isoler celles qui posent problème, etc. Ce travail est pénible physiquement et les pépiniéristes peinent à trouver de la main d'oeuvre pour réaliser ces tâches quotidiennes difficiles.

La Startup INSTAR ROBOTICS, spécialisée dans le développement de robots d'assistance, a conçu le robot TROOPER qui permet de répondre à ce besoin (voir figure 1.21).

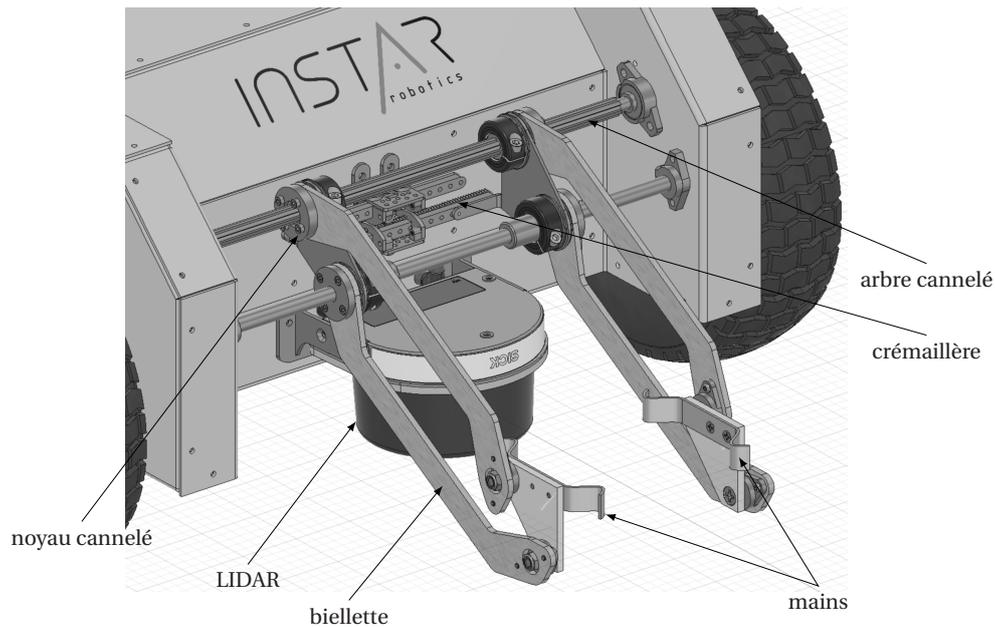


► **Figure 1.20.** Exemple de culture hors-sol.



► **Figure 1.21.** Robot TROOPER de la société INSTAR ROBOTICS.

La société INSTAR ROBOTICS a déposé un brevet concernant la solution permettant de prendre les pots (figure 1.22) : cette solution utilise deux moteurs, l'un pour rapprocher les bras et l'autre pour les lever et placer un pot dans une zone pouvant contenir 6 pots (magasin).



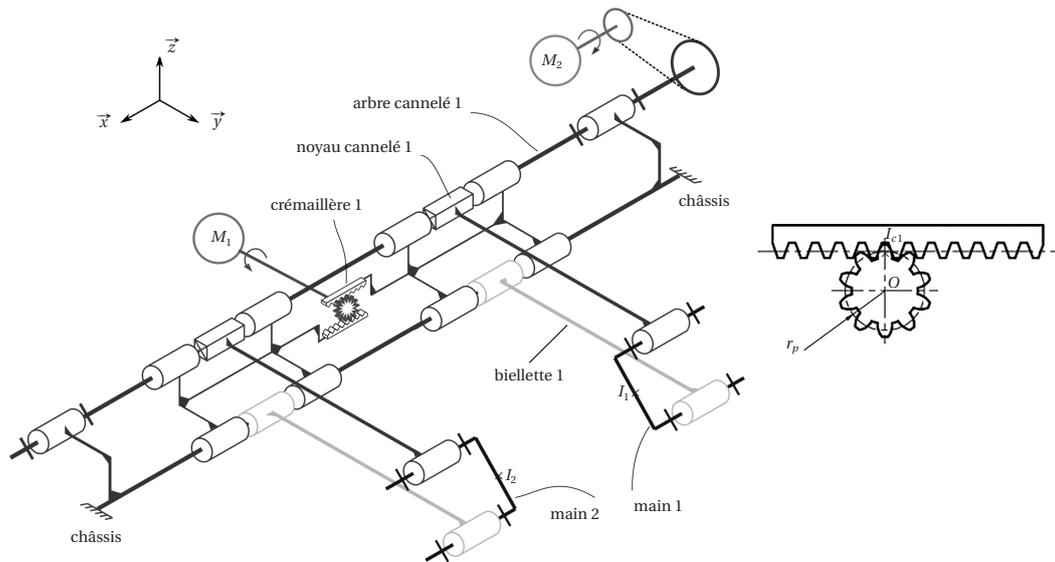
► **Figure 1.22.** Description du mouvement bras.

Des capteurs permettent de détecter lorsque les bras sont en position ouverte (bras complètement écartés) ou en position fermée (pinces en contact l'une avec l'autre). De même, des capteurs permettent de détecter la position haute et la position basse des bras. En position haute, il suffit d'ouvrir les bras pour que le pot soit bien placé dans la zone de stockage des pots. Pour détecter qu'il est possible de lever un pot, le courant  $i$  parcourant les moteurs est utilisé : s'il dépasse une valeur  $i_0$ , cela veut dire que le pot est serré suffisamment fort entre les deux mains et qu'il est possible de le lever.

La zone de stockage des pots est mise en mouvement par un moteur asservi en position qui réalise  $1/6^e$  de tour lorsqu'un pot est correctement positionné.

- 1) Proposer une solution mécanique (uniquement le nom de la solution) permettant de réaliser  $1/6^e$  de tour sans avoir besoin d'asservir le moteur.

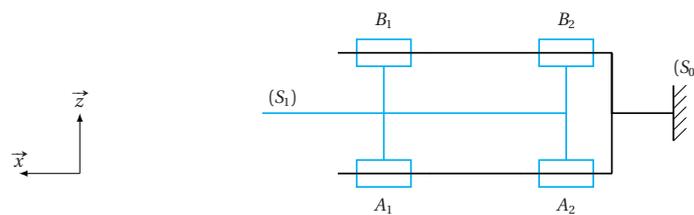
La solution retenue pour prendre les pots est donnée sur le schéma cinématique de la figure 1.23.



► Figure 1.23. Cinématique du système de prise des pots.

- 2) Indiquer quel moteur entraîne le rapprochement des bras ( $M_1$  ou  $M_2$ ) et celui qui permet de soulever le pot. Justifier pourquoi les « mains » se déplacent toujours parallèlement au sol et ce que cela implique sur les pots.

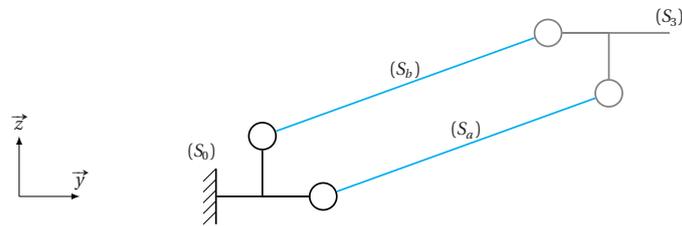
Le mouvement entre chaque crémaillère et le châssis est réalisé par quatre liaisons pivot glissant (voir figure 1.24).



► Figure 1.24. Modélisation simplifiée des liaisons entre la crémaillère et le châssis.

- 3) Après avoir tracé le graphe des liaisons de cette structure de guidage, déterminer le degré d'hyperstatisme (modèle spatial) associé à cet ensemble de liaisons (voir figure 1.24) et indiquer la conséquence d'une telle solution.

Le mouvement d'élévation d'une main est réalisé par un mécanisme qui peut être modélisé comme sur la figure 1.25.



► Figure 1.25. Modélisation simplifiée du mécanisme d'élévation.

- 4) Proposer une modélisation isostatique sans changer le nombre de liaisons du modèle de la figure 1.25. Faire le calcul du degré d'hyperstatisme de la solution proposée en considérant le modèle spatial. Réaliser un schéma cinématique dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  de la solution isostatique.



### EXERCICE C Robot assistant Effibot

Le robot Effibot est un robot d'aide à la personne permettant de transporter des charges lourdes. Ce système est actuellement développé par la société française Effidence et des sociétés telles que la SNCF travaillent en partenariat avec Effidence pour développer le robot afin de permettre aux usagers de transporter leurs bagages.



► Figure 1.26. Robot Effibot en situation de fonctionnement (suivi à distance).

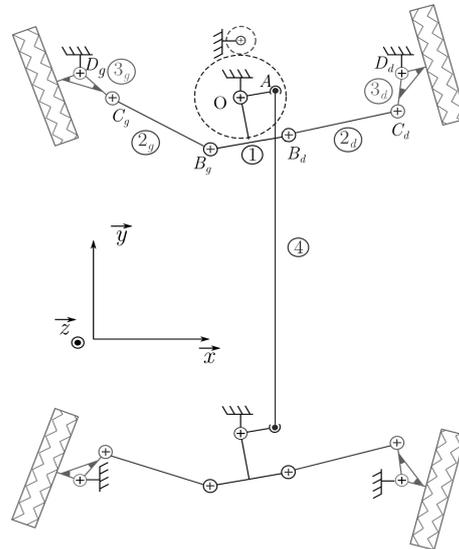
Le principe du fonctionnement d'Effibot est simple (figure 1.26) : l'utilisateur se place devant le robot qui le repère à l'aide de différents capteurs et, grâce à un traitement des informations, le robot Effibot le suit alors à une distance constante. L'étude menée dans cet extrait de sujet porte sur le système de direction à quatre roues directrices de l'Effibot : voir figure 1.27.

Le schéma cinématique du système de direction est donné figure 1.28.

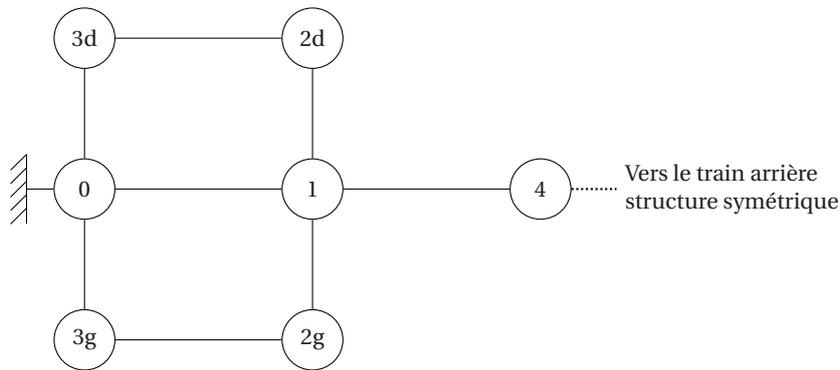
- 1) Compléter le graphe des liaisons de la figure 1.29 en renseignant uniquement les liaisons entre les pièces numérotées de la partie correspondant au train avant (le train arrière étant parfaitement identique, son étude découle de celle du train avant).
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 3) Quel est l'avantage principal et l'inconvénient principal d'un tel degré d'hyperstatisme dans le cas d'un tel système ?



► **Figure 1.27.** Pivotement des roues du robot Effibot pour un virage.



► **Figure 1.28.** Principe du système de direction.



► **Figure 1.29.** Graphe des liaisons du train avant de la direction.

- 4) On remplace toutes les pivots, à l'exception de celles avec le bâti, par des sphériques. Montrer alors que le modèle est dorénavant isostatique.
- 5) À quelles contraintes géométriques correspondait le degré d'hyperstatisme? Proposer une autre modification impliquant une seule liaison par boucle pour aboutir à un modèle isostatique.

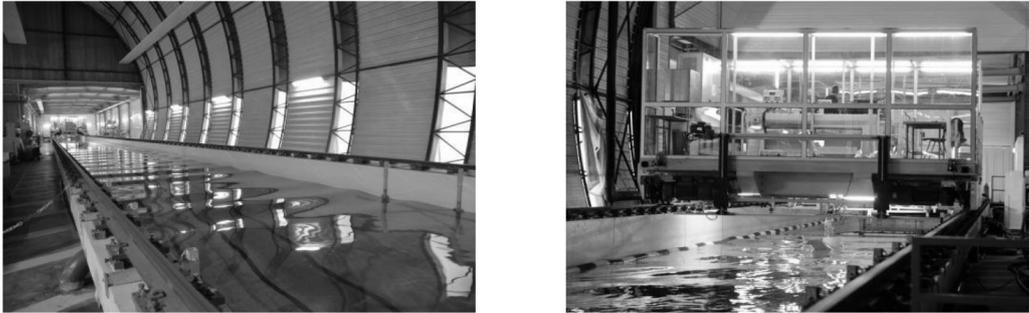


### EXERCICE D Bassin de traction

Le système étudié, nommé bassin de traction, est un des nombreux bassins d'essais du Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA) situé à Nantes. Ce bassin de traction mesure 140 m de long, 5 m de large, et a une profondeur constante de 3 m (voir figure 1.30). Il est équipé d'un chariot de traction pouvant se déplacer dans l'une ou l'autre des directions,

**EXERCICES**

avec des vitesses atteignant jusqu'à  $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . À une extrémité du bassin se trouve un batteur à houle permettant de générer des houles unidirectionnelles régulières de hauteur crête-à-croix maximale de 0,5 m.



► Figure 1.30. Bassin de traction à gauche et chariot de traction à droite.

Ce bassin de traction, le deuxième plus grand en France et le premier au niveau académique, permet de mener un certain nombre d'expériences, entre autres :

- études de navires sur eau calme et sur houle;
- tests de résistance à l'avancement de navires avec ou sans houle;
- optimisations de carènes, tenue à la mer de navires ou structures flottantes;
- tests de technologies en Energies Marines Renouvelables.

Une des exigences requises par le système est de permettre de réaliser de bonnes acquisitions relatives au comportement de la maquette embarquée sur le chariot. On étudie donc le principe de mesure des actions de l'eau sur la maquette.

La maquette de bateau à étudier et le mât métallique de support forment l'ensemble (5). Cet ensemble est lié à la plateforme (3) par l'intermédiaire du solide (4) et de six barres ( $B_1$ ) à ( $B_6$ ) de même longueur  $a$  et dotées chacune d'un capteur d'effort de type dynamométrique (voir figure 1.31).

Les barres ( $B_i$ ) sont orientées selon la direction  $\vec{x}_0$  pour ( $B_3$ ), la direction  $\vec{y}_0$  pour ( $B_4$ ), ( $B_5$ ) et ( $B_6$ ) et la direction  $\vec{z}_0$  pour ( $B_1$ ) et ( $B_2$ ) et on considère leur masse négligeable.

Le solide (4) est de masse  $m_4$  et de centre d'inertie supposé confondu avec le point  $O$  : la géométrie est telle que  $\vec{AO} = \vec{OC} = a\vec{x}_0$ ,  $\vec{OD} = -a\vec{z}_0$ ,  $\vec{OB} = d\vec{z}_0$  et  $\vec{OL} = -e\vec{x}_0 + f\vec{z}_0$ .

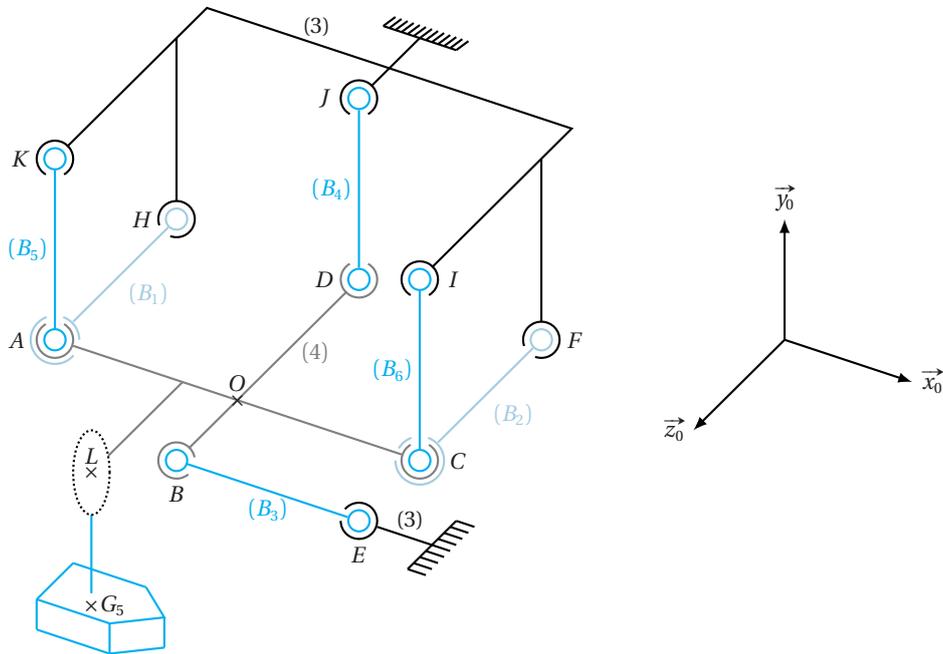
En  $A$  et en  $C$  se trouvent deux liaisons sphériques concentriques (même centre) : entre (1) et (4) et (5) et (4) en  $A$  ainsi que entre (2) et (4) et (6) et (4) en  $B$ .

La plateforme (3) est supposée immobile.

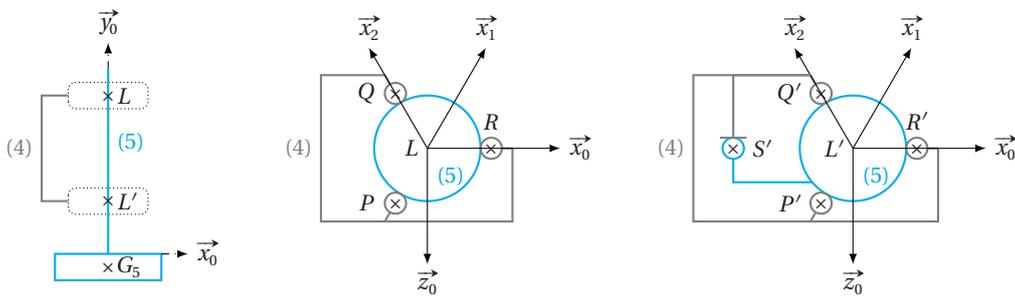
La fonction principale de ce dispositif est de mesurer les actions mécaniques qu'exerce l'eau sur la maquette de bateau. On cherche donc à mesurer à tout instant les composantes des éléments de réduction du torseur  $\{\mathcal{T}_{\text{eau} \rightarrow 5}\}$  au point  $G_5$ , centre d'inertie de l'ensemble (5) et tel que  $\vec{LG}_5 = -\lambda(t)\vec{y}_0$ .

- 1) Tracer le graphe des liaisons correspondant au schéma cinématique de la figure 1.31 (donner juste les liaisons, sans préciser leurs caractéristiques géométriques). Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 2) Les capteurs permettent de déterminer l'action mécanique dans chaque barre. Justifier l'intérêt de l'étude de la question précédente compte tenu de la problématique retenue.

On s'intéresse maintenant à la liaison entre l'ensemble (5) et le solide (4). La maquette est en liaison encastrement avec un mât métallique (ensemble (5)), lui-même en liaison avec le solide (4) par l'intermédiaire de sept liaisons sphère/plan (voir figure 1.32), supposées parfaites (au sens énergétique).



► Figure 1.31. Schéma cinématique 3D du dispositif de mesure.



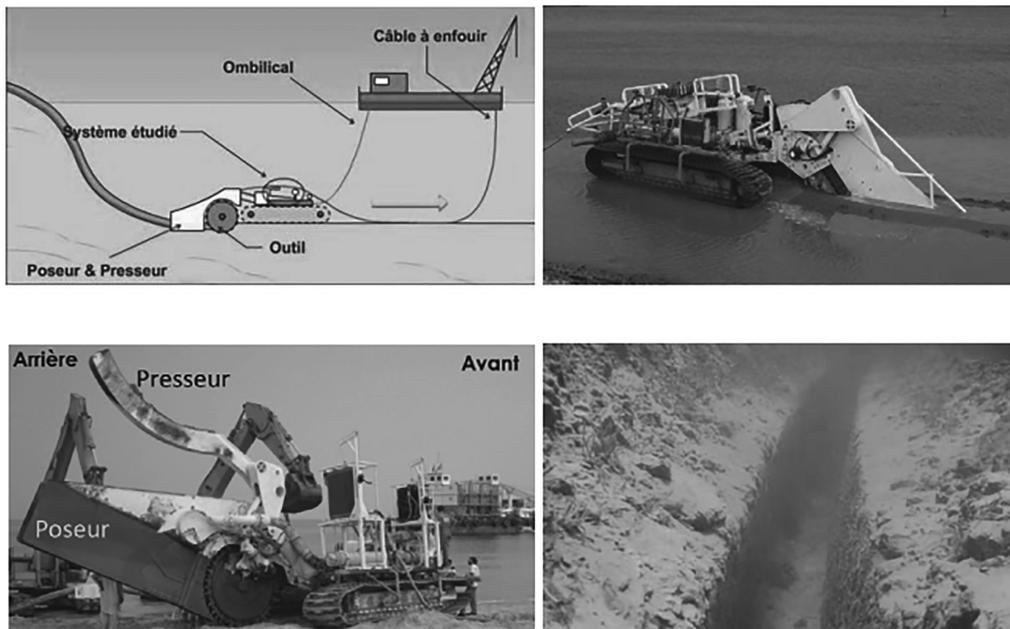
► Figure 1.32. Modélisation de la liaison entre (4) et (5).

- 3) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation en indiquant clairement les caractéristiques de chaque liaison. Déterminer le degré d'hyperstatisme associé à cette modélisation.
- 4) Démontrer que la liaison cinématiquement équivalente réalisée par les trois liaisons en  $P$ ,  $Q$  et  $R$  est une liaison sphère-cylindre dont on précisera les caractéristiques.
- 5) Sans faire de calcul (mais en justifiant la démarche), donner le torseur cinématique de la liaison cinématiquement équivalente aux quatre liaisons sphère-plan exprimée au point  $L'$ . Cette structure correspond-elle à une liaison normalisée?
- 6) En déduire la liaison cinématiquement équivalente aux deux liaisons en  $L$  et  $L'$  entre (4) et (5) (on pose  $\overline{LL'} = -h\vec{y}_0$ ) puis déterminer le degré d'hyperstatisme de ce guidage. Pourquoi le constructeur a-t-il choisi cette structure par plusieurs contacts ponctuels plutôt par des contacts surfaciques pour le guidage entre (4) et (5)?



## EXERCICE E Enfouissement de câbles sous-marins

Pour enfouir les câbles, la société LD TravOcean utilise une barge et un véhicule sous-marin à chenilles (voir figure 1.33) : ainsi, le câble à enfouir est déposé progressivement depuis la barge dans la tranchée effectuée par l'engin sous-marin. Les éléments appelés « poseur » et « presseur » servent de guides afin de bien maîtriser la mise en position du câble dans la tranchée. Le pilotage et l'alimentation de la machine se font grâce à l'ombilical qui provient de la barge.



► Figure 1.33. Description du système d'enfouissement.

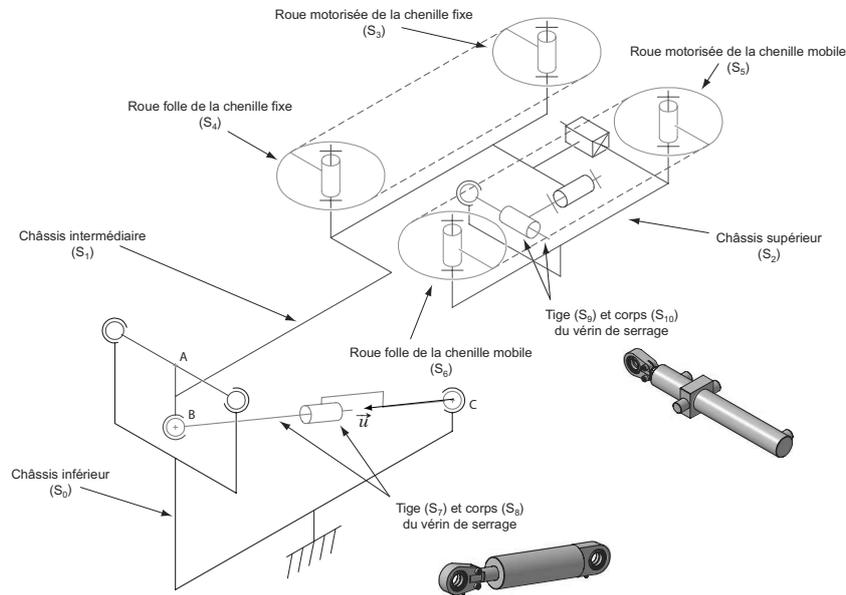
Pour gérer l'entrée du câble dans le poseur, le sous-marin chenillé est équipé d'un système d'entraînement du câble (MTL) qui a donc pour fonction de gérer l'orientation et la tension du câble à enfouir, afin que celui-ci se loge dans le poseur convenablement.

Pour gérer la tension du câble, la MTL dispose d'un couple de chenilles motorisées qui viennent serrer le câble. Pour cela, une des chenilles, dite fixe, est montée sur le châssis intermédiaire, et l'autre chenille, dite mobile, est montée sur le châssis supérieur qui coulisse sur le châssis intermédiaire : l'effort presseur est fourni par un vérin hydraulique, dit « de serrage ». Une fois le câble serré, deux moteurs hydrauliques entraînent les chenilles.

Pour maîtriser l'orientation du câble par rapport au poseur, ce dernier doit pouvoir s'incliner. Pour cela, le châssis intermédiaire est guidé en rotation par rapport au châssis inférieur solidaire du véhicule sous marin : l'orientation des chenilles est imposée par un vérin hydraulique, dit « de relevage ».

On propose d'analyser le fonctionnement du système par modélisation du système et plus particulièrement l'exigence principale « Faciliter l'entrée du câble dans le système de pose ». Le schéma de principe relatif au fonctionnement de la MTL est donné figure 1.34. Les deux chenilles sont indiquées en traits fins interrompus.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation sans prendre en compte les solides ( $S_3$ ), ( $S_4$ ), ( $S_5$ ) et ( $S_6$ ) ainsi que les chenilles. Indiquer les caractéristiques géométriques de chaque liaison (centre, axe, direction, etc.) en utilisant les informations de la figure 1.34.



► Figure 1.34. Schéma de principe de la MTL.

- 2) Déterminer le degré d'hyperstatisme du sous-ensemble composé des pièces  $(S_0)$ ,  $(S_1)$ ,  $(S_7)$  et  $(S_8)$ . Proposer une évolution pour rendre le modèle de ce sous-ensemble isostatique (évidemment sans modifier ni les classes d'équivalence ni le principe cinématique du mécanisme).
- 3) Déterminer le degré d'hyperstatisme du sous-ensemble constitué des pièces  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_9)$  et  $(S_{10})$ . Proposer une évolution à donner conduisant à un modèle isostatique pour cet ensemble en modifiant une des liaisons.



### EXERCICE F Chariot élévateur à bateau

Le stockage des bateaux dans des « ports à sec » offre une solution alternative à la saturation des ports de plaisance tout en limitant fortement les contraintes d'entretien et de maintenance. Les bateaux sont stockés dans des casiers et sont mis à l'eau et rangés grâce à des chariots élévateurs à bateaux.

L'objet de cette étude (contexte figure 1.35) est l'un de ces chariots élévateurs qui assurent les opérations de « sortie de l'eau - dépose dans le casier » ou « sortie du casier - mise à l'eau ».

Le chariot élévateur permet la manutention de bateaux d'une masse pouvant aller jusqu'à 3 000 kg à une hauteur de 8 m et il est principalement constitué du chariot (qui permet le déplacement de l'ensemble et qui intègre tout le système de gestion de la puissance pour la préhension et le levage) et du tablier (qui permet la préhension et la dépose du bateau).

Le tablier, constitué du mât et des fourches, a quatre mouvements possibles (voir figure 1.36 avec indications des éléments) : le basculement, le levage et la dépose, le déplacement latéral et l'ouverture des fourches. Le modèle géométrique de gestion des mouvements du tablier est fourni figure 1.37.

- 1) Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation (nommer juste les liaisons, sans indiquer leurs caractéristiques géométriques).
- 2) Sur ce modèle, préciser le nombre de cycles indépendants, les inconnues cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par les liaisons et les mobilités (utiles et internes) puis calculer le degré d'hyperstatisme par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort.
- 3) Analyser les contraintes géométriques et conclure quant au choix de conception du constructeur.

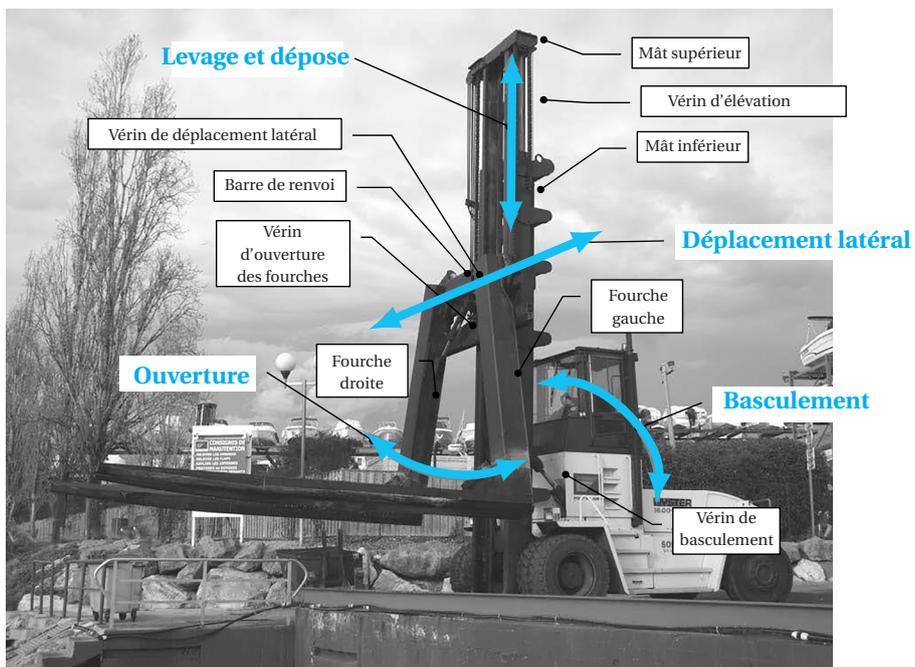


Chargement du bateau



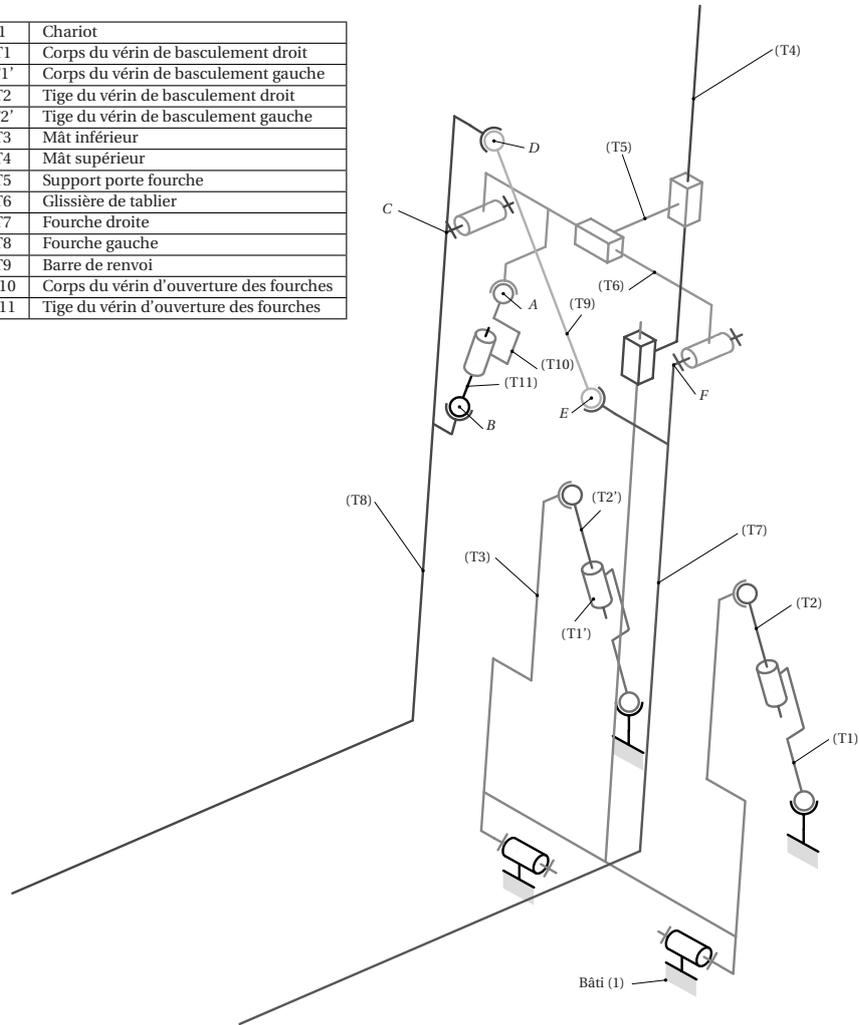
Mise à l'eau du bateau

► **Figure 1.35.** Contexte de l'étude.



► **Figure 1.36.** Éléments du chariot élévateur étudié et les quatre mouvements possibles.

1	Chariot
T1	Corps du vérin de basculement droit
T1'	Corps du vérin de basculement gauche
T2	Tige du vérin de basculement droit
T2'	Tige du vérin de basculement gauche
T3	Mât inférieur
T4	Mât supérieur
T5	Support porte fourche
T6	Glissière de tablier
T7	Fourche droite
T8	Fourche gauche
T9	Barre de renvoi
T10	Corps du vérin d'ouverture des fourches
T11	Tige du vérin d'ouverture des fourches



► Figure 1.37. Modèle du tablier.

**EXERCICES**



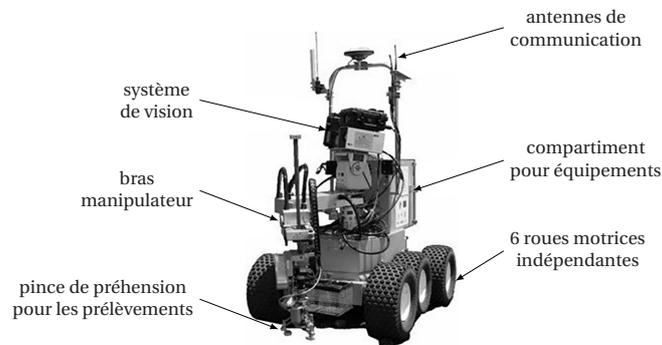
## EXERCICE G Châssis adaptatif du robot Robovolc

Les observations scientifiques réalisées pendant les phases éruptives sont aujourd'hui fondamentales pour l'étude des volcans : en effet, les prélèvements des gaz magmatiques et des échantillons rocheux rejetés lors de ces phases constituent des indicateurs fiables de l'activité interne des volcans et ils sont donc une riche source d'informations pour les volcanologues.

Cependant, les éruptions sont des phases actives très dangereuses et il est primordial de limiter les risques humains lors d'observations et de prélèvements à proximité des cratères en éruption.

Avec ce constat, allié aux avancées technologiques dans le domaine de la robotique, la Communauté Européenne a financé le projet ROBOVOLC dont le but est la réalisation d'un robot mobile pour l'exploration volcanique. Ce robot devait être capable de s'approcher d'un cratère actif et de collecter des échantillons rocheux, gazeux ou d'autres données physiques et chimiques issus de rejets éruptifs.

Le système ROBOVOLC se divise en plusieurs sous-systèmes liés à la navigation, au prélèvement et à la communication : voir figure 1.38.



► Figure 1.38. Représentation du système ROBOVOLC.

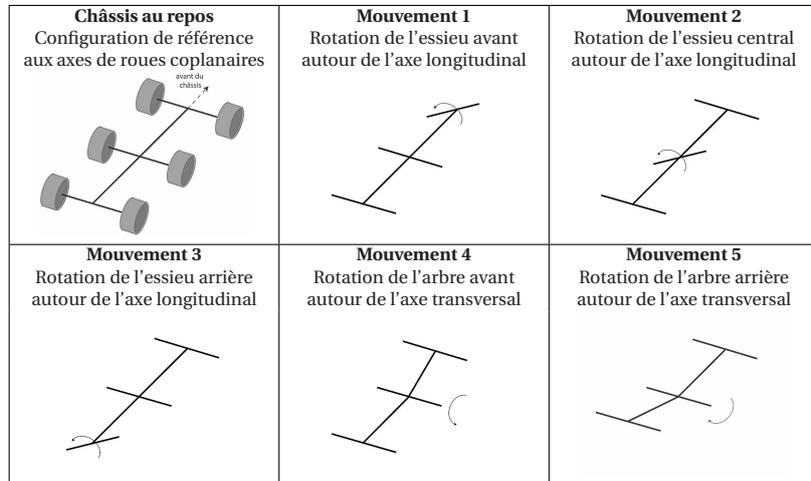
Le terrain volcanique est en pratique très accidenté, avec la présence d'obstacles (roches) et de fortes pentes. Par conséquent, le système de locomotion de ROBOVOLC doit être adapté à ce type de terrain.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane.

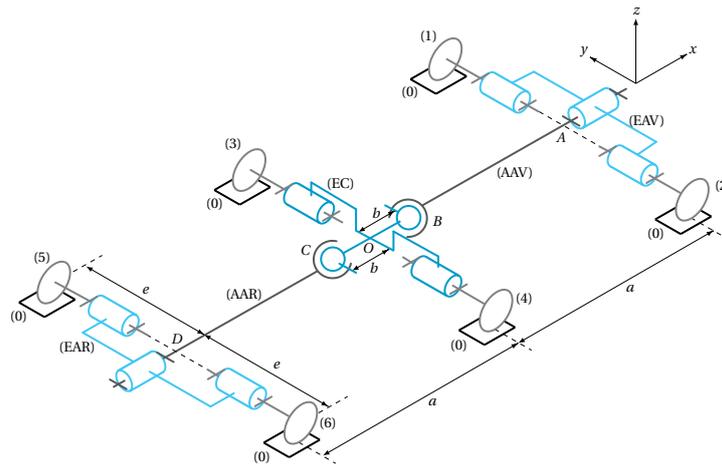
Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres et reliées entre elles par des guidages permettant une ou plusieurs rotations (appelées articulations dans la suite) : une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée figure 1.39.

Pour information, les cinq articulations possèdent une raideur en rotation imposée : on suppose cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

Un schéma cinématique de la plateforme {châssis + roues} est présenté figure 1.40.



► Figure 1.39. Illustration des mouvements de déformation du châssis.



► Figure 1.40. Schéma cinématique de la plateforme.

Cette plateforme est composée des éléments suivants :

- l'essieu avant, noté (EAV), reliant les roues avant (1) et (2);
- l'essieu central, noté (EC), reliant les roues centrales (3) et (4);
- l'essieu arrière, noté (EAR), reliant les roues arrière (5) et (6);
- l'arbre avant, noté (AAV), connectant les essieux (EAV) et (EC);
- l'arbre arrière, noté (AAR), connectant les essieux (EC) et (EAR).

L'empattement entre les essieux est noté  $a$  et la distance entre deux roues d'un même essieu est notée  $2e$ . Les articulations entre l'essieu (EC) et les essieux (AAV) et (AAR) sont situées à une distance longitudinale  $\pm b$  du centre  $O$  et autorisent des rotations selon les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  : elles sont modélisées par des liaisons sphériques à doigts de centres respectifs  $B$  et  $C$  et de rotation bloquée selon  $\vec{z}$  (donc, en suivant la terminologie de la norme, de direction de doigt  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$  dans la rainure plane de normale  $\vec{y}$  ou  $\vec{x}$ ).

**EXERCICES**

Les deux articulations entre (EAV) et (AAV) et entre (EAR) et (AAR) autorisent une unique rotation selon la direction  $\vec{x}$  seulement : elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ .

D'autre part, les six guidages en rotation entre les essieux et les roues sont modélisés par des liaisons pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  (roues avants),  $(O, \vec{y})$  (roues centrales) ou  $(D, \vec{y})$  (roues arrières).

Enfin, le contact de chaque roue ( $i$ ) avec le sol (0) est modélisé par une liaison sphère-plan de centre  $P_i$  et de normale  $\vec{z}$ .

- 1) Indiquer les noms des pièces en rotation de la figure 1.40 correspondant aux cinq mouvements définis sur la figure 1.39.
- 2) Tracer le graphe des liaisons du modèle cinématique en précisant les caractéristiques des liaisons en se basant sur la position de la figure 1.40 (notamment celles des sphériques à doigt).

On considère tout d'abord que les liaisons des roues avec le sol sont parfaites (au sens énergétique, donc sans frottements) : les points de contact glissent donc sur le sol.

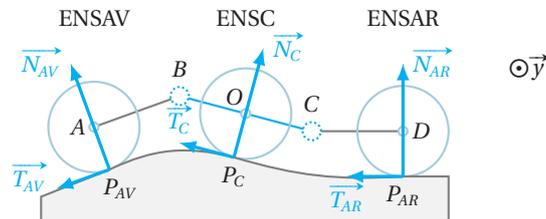
- 3) Indiquer le nombre de mobilités du modèle du système. Déterminer alors le degré d'hyperstatisme du modèle par le point de vue géométrique puis par le point de vue en effort. Que peut-on en conclure vis-à-vis de la problématique énoncée initialement ?

On considère maintenant un frottement au contact dans les liaisons sphères-plans : du point de vue cinématique, chaque sphère-plan devient alors une sphérique instantanée.

- 4) Préciser, dans ces conditions, les mobilités qui subsistent et déterminer à nouveau le degré d'hyperstatisme du modèle. Peut-on calculer toutes les inconnues d'action mécanique de liaison ?

On considère par la suite que le sol est horizontal dans la direction  $\vec{y}$  : on se ramène alors à un problème dans le plan médian  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ . Dans cette configuration plane, la plateforme est constituée de trois ensembles articulés pour s'adapter au terrain accidenté (voir figure 1.41) :

- l'ensemble avant (noté ENSAV) constitué des pièces (EAV), (AAV) et des roues (1) et (2) ;
- l'ensemble central (noté ENSC) constitué de la pièce (EC) et des roues (3) et (4) ;
- l'ensemble arrière (noté ENSAR) constitué des pièces (EAR), (AAR) et des roues (5) et (6).



► Figure 1.41. Configuration plane du châssis en évolution sur le sol.

On considère qu'il y a roulement sans glissement au contact entre les roues et le sol en  $P_{AV}, P_C$  ou  $P_{AR}$ , projections des points de contact  $P_i$  dans le plan médian  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ .

Les actions mécaniques transmises par le sol (0) sur chaque ensemble {essieu + roue} équivalent sont modélisées par des glisseurs (voir figure 1.41), comportant une composante normale (notée  $\vec{N}_{AV}, \vec{N}_C$  ou  $\vec{N}_{AR}$ ) et une composante tangentielle de traction (notée  $\vec{T}_{AV}, \vec{T}_C$  ou  $\vec{T}_{AR}$ ).

- 5) En considérant le système en équilibre dans la position de la figure, justifier, sans faire de calcul, qu'il n'est pas possible de déterminer les différentes actions de contact avec le sol ( $\vec{N}_{AV}, \vec{T}_{AV}$ , etc.). Proposer une hypothèse à ajouter pour permettre de les déterminer.

# CORRIGÉS

## Corrigés des Vrai/Faux

- a) Faux. Il n'y a aucun lien entre mouvement et hyperstatisme d'un modèle. Il est possible d'avoir tous les cas de figure, à savoir des mécanismes mobiles ( $m > 0$ ) ou immobiles ( $m = 0$ ), ayant une modélisation isostatique ( $h = 0$ ) ou hyperstatique ( $h > 0$ ).
- b) Vrai. Le nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1$  correspond au nombre de boucles indépendantes du modèle comportant  $N_p$  pièces (y compris le bâti) et  $N_L$  liaisons entre ces pièces : il y aura donc  $6\gamma$  (en 3D) ou  $3\gamma$  (en 2D) équations issues de l'étude cinématique.
- c) Faux. Le nombre cyclomatique  $\gamma$  n'est pas lié au mécanisme mais à son modèle et sa valeur dépend donc de la « finesse » du modèle adopté (nombre de pièces et de liaisons) : selon le niveau d'observation choisi (très global ou au contraire local), on pourra avoir de multiples modèles, avec des nombres différents de pièces et de liaisons, et donc de boucles.
- d) Vrai, mais seulement dans le cas d'une liaison parfaite (hypothèse par défaut en cas d'absence d'indication explicite) : dans ce cas, le torseur cinématique et le torseur des actions mécaniques transmissibles sont *orthogonaux*, ce qui implique que, pour une liaison  $\mathcal{L}_i$ , on a  $n_{ci} + n_{si} = 6$  (en 3D) ou  $n_{ci} + n_{si} = 3$  (en 2D) avec  $n_{ci}$  le nombre de termes indépendants du torseur cinématique et  $n_{si}$  le nombre de termes indépendants du torseur des actions mécaniques transmissibles. Par contre, dans le cas d'une liaison non parfaite, donc incluant des pertes énergétiques (par frottement par exemple), on aura la relation  $n_{ci} + n_{si} > 6$  (en 3D) ou  $n_{ci} + n_{si} > 3$  (en 2D).
- e) Vrai. Une structure en série, constituant donc une chaîne (ou chaîne ouverte), ne peut structurellement comporter de contraintes géométriques de montage.
- f) Faux. Une structure comportant des liaisons en parallèle, constituant donc des boucles (ou chaînes fermées), peut ou non comporter des contraintes géométriques de montage, tout dépend de la modélisation choisie.
- g) Vrai, mais seulement dans le cas de liaisons parfaites (hypothèse par défaut en cas d'absence d'indication explicite). Par ailleurs, la formule  $h = 6\gamma + m - N_C$  n'est valable que pour une modélisation tridimensionnelle : pour une modélisation plane, la formule est  $h = 3\gamma + m - N_C$ .
- h) Vrai, mais seulement dans le cas de liaisons parfaites (hypothèse par défaut en cas d'absence d'indication explicite). La formule  $h = N_S + m - 6(N_p - 1)$  est valable pour une modélisation tridimensionnelle dans le cadre d'hypothèse de liaisons parfaites (donc sans pertes) mais, pour une modélisation plane, la formule est  $h = N_S + m - 3(N_p - 1)$ .

## Corrigés des exercices d'application

### EXERCICE 1

- 1) Par la description du texte, on peut raisonnablement modéliser le contact entre (1) et (2) par une droite et donc choisir une liaison cylindre-plan de normale  $\vec{x}_0$  et de droite de contact  $(I, \vec{z}_0)$ . La mobilité utile est  $m_u = 1$  et il n'y a pas de mobilité interne, soit  $m_i = 0$  (aucun mouvement possible si la rotation d'entrée et la translation de sortie sont bloquées), soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$ . Il n'y a qu'un seul cycle dans ce modèle soit un nombre cyclomatique  $\gamma = 1$  (ce qui peut aussi se déterminer par la formule  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$ ). Le modèle comportant 1 pivot, 1 glissière et 1 liaison cylindre plan,  $N_C = 1 + 1 + 4 = 6$  inconnues cinématiques et donc  $N_S = 5 + 5 + 2 = 12$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles.

On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 1 - 6 = 1 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 12 + 1 - 6 \times (3 - 1) = 1 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

2) Le calcul de la question précédente met en évidence une contrainte de montage. Si on choisit de la placer au niveau de liaison entre (1) et (2), on identifie une contrainte angulaire selon l'axe  $(I, \vec{y}_0)$ .

Pour rendre le modèle isostatique, il suffit de remplacer la liaison cylindre-plan par une liaison sphère-plan de centre  $I$  et normale  $\vec{x}_0$  : avec cette évolution, le nombre cyclomatique et la mobilité globale sont inchangés ( $\gamma = 1$  et  $m = 1$ ) mais le nombre d'inconnues cinématique augmente de 1 car la sphère-plan a 5 degrés de liberté (3 rotations + 2 translations) alors que la cylindre-plan en a 4 (2 rotations + 2 translations), et on vérifie bien que le degré d'hyperstatisme est

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 1 - 7 = 0 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 11 + 1 - 6 \times (3 - 1) = 0 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

3) Dans le cas d'un modèle plan :

- la pivot entre (0) et (1) et la glissière entre (0) et (2) sont inchangées, soit  $n_c = 1$  et  $n_s = 2$  pour ces deux liaisons (car on ne prend en compte que 3 composantes d'effort dans un modèle plan) ;
- la liaison entre (1) et (2) devient une ponctuelle plane (1 rotation selon la normale au plan  $\vec{z}_0$  et 1 translation selon la direction  $\vec{y}_0$ ), soit  $n_c = 2$  et  $n_s = 1$  (1 seul effort transmis : la résultante selon  $\vec{x}_0$ ).

Le nombre cyclomatique et la mobilité sont inchangés par rapport au modèle tridimensionnel ( $\gamma = 1$  et  $m = 1$  car il n'y a toujours qu'une boucle et une seule mobilité utile) et le degré d'hyperstatisme vaut alors :

$$\begin{cases} h = 3\gamma + m - N_C = 3 \times 1 + 1 - (1 + 1 + 2) = 0 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 3(N_p - 1) = (2 + 2 + 1) + 1 - 3 \times (3 - 1) = 0 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Le modèle plan est donc isostatique.



### Attention!

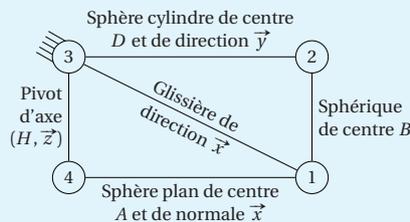
On ne doit surtout pas conclure sur les contraintes géométriques d'un modèle plan. Celui-ci étant, par définition très limité, surtout en comparaison au modèle d'une étude tridimensionnelle proche de la réalité!

En effet, la modélisation 2D est une *dégradation* d'une modélisation 3D où 3 mouvements (2 rotations et 1 translation) ou 3 efforts (1 composante de la résultante et 2 composantes du moment transmissible) ont été sciemment non pris en compte, ce qui limite évidemment le domaine d'étude et donc l'analyse.

On peut seulement conclure sur le fait que la résolution complète d'un problème de statique est possible en étude plane si le modèle plan est isostatique.

## EXERCICE 2

1) On obtient le graphe des liaisons suivant :



2) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_P + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$  cycles indépendants,  $N_C = 1 + 1 + 3 + 4 + 5 = 14$  inconnues cinématiques et donc  $N_S = 5 + 5 + 3 + 2 + 1 = 16$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles. Le modèle a une mobilité utile et une mobilité interne, soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 1 = 2$  :

- mobilité utile : la rotation de (4) entraîne une rotation selon  $\vec{z}$  de (2) par la translation de la pièce (1), tous ces mouvements étant définis par rapport au support (3) ;
- mobilité interne : la pièce (2) peut tourner sur elle-même sans influencer le mouvement utile.

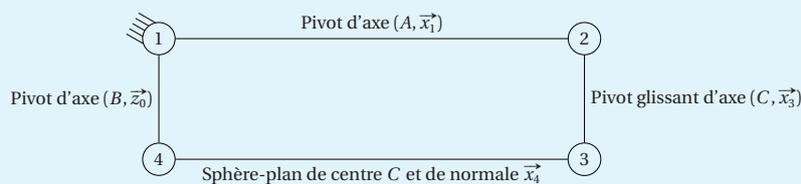
On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 2 + 2 - 14 = 0 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_P - 1) = 16 + 2 - 6 \times (4 - 1) = 0 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Le modèle étant isostatique, il n'y a pas de contrainte de montage (point de vue géométrique) et toutes les actions mécaniques transmises dans les liaisons peuvent être déterminées (point de vue en effort).

### EXERCICE 3

1) Le graphe des liaisons est le suivant.



2) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_P + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$  cycle,  $N_C = 2 \times 1 + 2 + 5 = 9$  inconnues cinématiques et donc  $N_S = 4 + 2 \times 5 + 1 = 15$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles. Le modèle a 2 mobilités utiles et 1 mobilité interne, soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 2 + 1 = 3$  :

- première mobilité utile : la rotation de (2) / (1) entraîne la translation de (3) par rapport à (2) ;
- seconde mobilité utile : la rotation de (4) / (1) entraîne la translation de (3) par rapport à (2) ;
- mobilité interne : pivotement sur elle-même de la pièce (2), sans influence sur les autres mouvements.

On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 3 - 9 = 0 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_P - 1) = 15 + 3 - 6 \times (4 - 1) = 0 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Le modèle étant isostatique, il n'y a pas de contrainte de montage (point de vue géométrique) et toutes les actions mécaniques transmises dans les liaisons peuvent être déterminées (point de vue en effort).

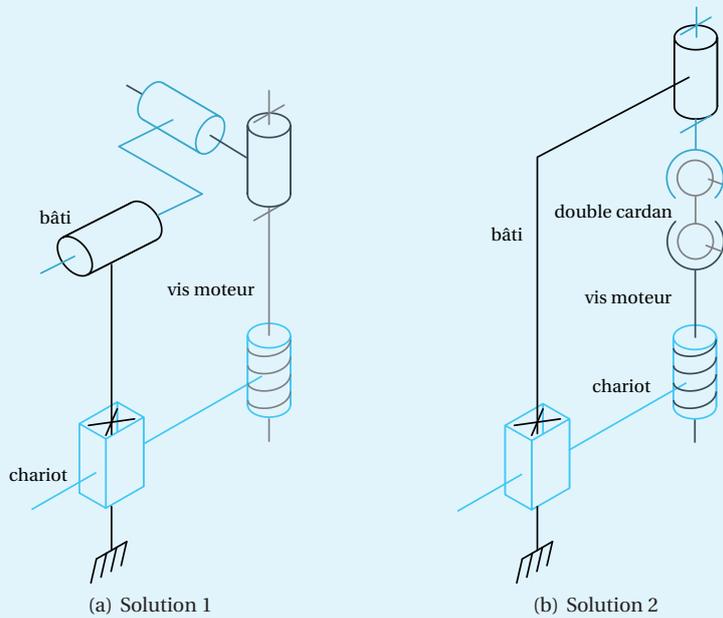
### EXERCICE 4

1) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_P + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$  cycle,  $N_C = 3 \times 1 = 3$  inconnues cinématiques et  $N_S = 3 \times 5 = 15$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles (on rappelle en effet que la liaison hélicoïdale comporte 1 seul degré de liberté car les mouvements de translation et de rotation sont liés, et c'est donc également le cas pour les composantes de la résultante et du moment selon l'axe, soit 5 composantes d'actions mécaniques transmissibles indépendantes). Le degré de mobilité est égal ici à 1 car seul le moteur entraîne un mouvement d'ensemble. On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 1 - 3 = 4 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_P - 1) = 15 + 1 - 6 \times (3 - 1) = 4 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

2) Il y a 4 contraintes géométriques de montage qui correspondent au parallélisme des axes, ce qui correspond en pratique à 2 contraintes angulaires (selon des axes de directions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$ ) et 2 contraintes de distance (selon les directions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$ ). Deux solutions sont alors possibles :

- solution 1 : monter l'hélicoïdale dans une structure dite à « écrou flottant » permettant 2 rotations et 2 translations d'amplitudes limitées et orthogonales de l'écrou par rapport à la pièce en aval, solution « compacte » intéressante dans le cas d'efforts transmis limités car la structure est assez fragile ;
- solution 2 : « couper » la pièce (1) en deux parties, rajouter une pièce intermédiaire reliée aux parties amont et aval par des cardans (modèle : sphérique à doigt) entre (1) et (2), solution encombrante mais qui permet de transmettre de fortes actions mécaniques.



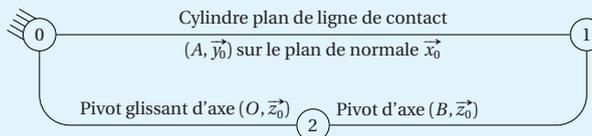
► Figure 1.42. Modèle d'un mécanisme élévateur modification.

**Remarque**

Dans le système étudié, la solution 2 serait la plus probable car les efforts sont très importants.

**EXERCICE 5**

1) Le graphe des liaisons est le suivant :



2) Le modèle comporte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$  cycle,  $N_C = 1 + 2 + 4 = 7$  inconnues cinématiques et  $N_S = 5 + 4 + 2 = 11$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles.

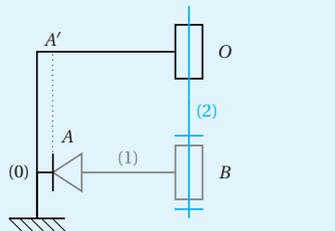
Il y a 2 mobilités utiles (l'actionneur est à 2 degrés de liberté, comme indiqué dans le texte) et pas de mobilité interne (car aucun mouvement interne n'est possible quand on bloque à la fois la rotation et la translation de (2) par rapport à (0)), soit  $m = m_u + m_i = 2 + 0 = 2$ .

On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

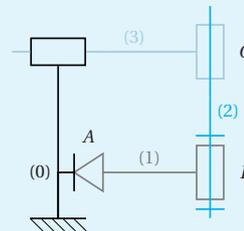
$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 2 - 7 = 1 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 11 + 2 - 6 \times (3 - 1) = 1 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

3) Il est possible de positionner sans contrainte chacun des solides (1) et (2) par rapport au bâti (0) avec les liaisons indiquées mais, pour pouvoir assembler (1) et (2), la distance entre A et B doit être égale à la distance entre O et la projection A' de A sur l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  (voir figure de gauche ci-après).

On peut rendre ce modèle isostatique en ajoutant une liaison glissière entre le bâti (0) et le solide (2), et donc une pièce intermédiaire (3) : cela permet d'ajuster la distance entre A et B (on rajoute donc un degré de liberté), sans changer ni la mobilité (qui reste de 2) ni le nombre de cycles (qui reste de 1).



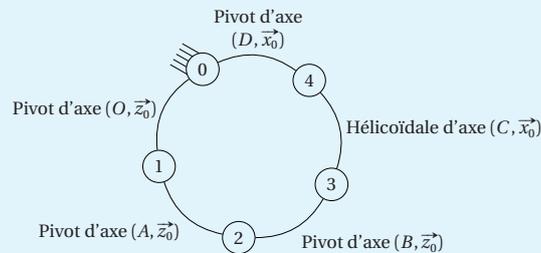
Solution initiale, contrainte en distance  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'O}\|$ .



Évolution isostatique par ajout d'une pièce et d'une glissière.

### EXERCICE 6

1) Le graphe des liaisons est le suivant :



2) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 5 - 5 + 1 = 1$  cycle,  $N_C = 5 \times 1 = 5$  inconnues cinématiques et donc  $N_S = 5 \times 5 = 25$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles (rappel : la liaison hélicoïdale est telle que  $n_c = 1$  et  $n_s = 5$  car 2 mouvements et 2 efforts sont proportionnels).

Le modèle a une unique mobilité utile et pas de mobilité interne, soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$ . On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 1 - 5 = 2 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 25 + 1 - 6 \times (5 - 1) = 2 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

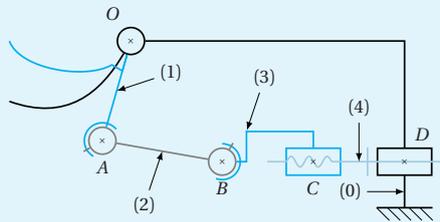
3) Il y a 2 contraintes géométriques de montage au niveau de la liaison pivot en A :

- Une contrainte de positionnement en translation selon la direction  $\vec{z}_0$ , car les centres des trois pivots en O, A et B devant être au même niveau selon la direction  $\vec{z}_0$ .

- Une contrainte d'angle selon une axe du plan (de vecteur directeur  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  ou toute combinaison de ces deux directions, l'axe de cette pivot devant en effet être parallèle à ceux des deux autres pivots).

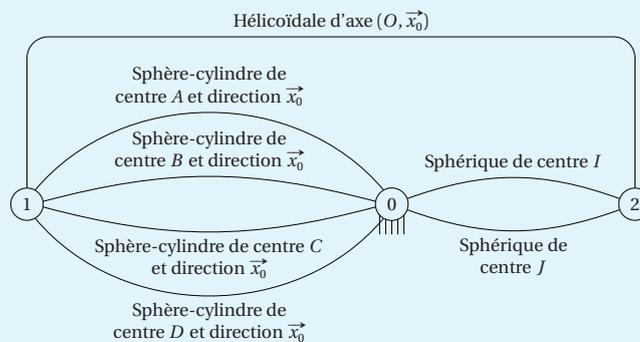
Pour rendre le modèle isostatique, deux étapes de réflexion sont nécessaires :

- La première idée est de modifier la seule liaison en A en ajoutant deux mobilités selon les contraintes géométriques identifiées, soit une translation selon  $\vec{z}_0$  et une rotation selon un axe dans le plan (par exemple selon  $\vec{y}_0$ ) : cette modification ne modifie certes ni le nombre cyclomatique ni la mobilité du modèle ... mais aboutit à une liaison à 3 degrés de liberté (2 rotations + 1 translation) qui ne correspond à aucun modèle normalisé, ce qui, bien que tout à fait cohérent, est en général à éviter.
- La seconde idée est de faire évoluer les pivots en A et en B en sphériques à doigt (2 degrés de liberté) de rotation bloquée autour de n'importe quelle direction dans le plan (identique ou non, cela ne change rien), ce qui permet de s'adapter aux défauts de planéité de la partie amont et de la partie aval : cette modification ne modifie ni le nombre cyclomatique ni la mobilité du modèle mais rajoute 2 degrés de liberté (1 par liaison) au modèle, ce qui permet de le rendre isostatique.



## EXERCICE 7

1) Le graphe des liaisons est le suivant :



2) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 7 - 3 + 1 = 5$  cycles,  $N_C = 5 \times 4 + 3 + 1 = 24$  inconnues cinématiques et  $N_S = 5 \times 2 + 4 + 5 = 18$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles (rappel : la liaison hélicoïdale est telle que  $n_c = 1$  et  $n_s = 5$  car 2 mouvements et 2 efforts sont proportionnels).

Le modèle a une unique mobilité utile (translation de la table induite par la rotation de 2) et pas de mobilité interne, soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$ .

On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

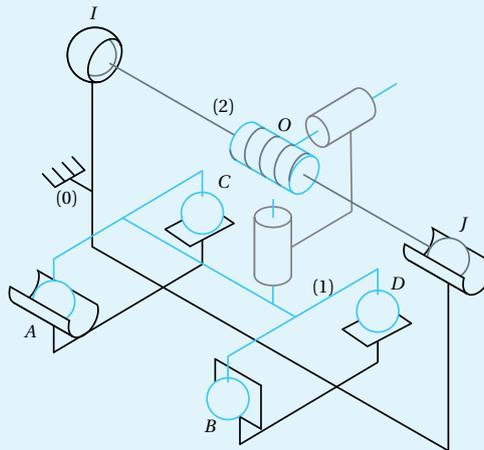
$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 5 + 1 - 24 = 7 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 18 + 1 - 6 \times (3 - 1) = 7 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

3) Les contraintes géométriques peuvent être identifiées (entre autres) en deux endroits.

- Positionnement et orientation de l'écrou par rapport à la vis pour assurer un guidage cohérent, l'axe de la vis (2) devant être confondu avec l'axe de l'écrou lié à (1) : on identifie alors 4 contraintes géométriques, correspondant en pratique à 2 rotations + 2 translations (on retrouve un des exercices précédents en remplaçant la liaison entre le chariot et le bâti par une liaison glissière).
- Guidage en translation du chariot (1) par rapport au bâti (0) par les quatre sphères-cylindres, les deux droites (AB) et (CD) devant être parallèles et à la bonne distance : on a alors 3 contraintes géométriques, correspondant en pratique à 2 rotations (parallélisme) + 1 translation (bonne distance).

Les propositions de modification du modèle sont alors les suivantes.

- Pour les 4 contraintes associées au dispositif de guidage vis-écrou, il suffit de rajouter un écrou flottant entre (1) et (2) comme vu dans le corrigé de l'exercice 4) : dans ce cas, on ne modifie ni le nombre cyclomatique  $\gamma$  ni la mobilité mais on rajoute 4 degrés de liberté par les deux pivots glissants en série et, par conséquent, on lève 4 contraintes géométriques et le degré d'hyperstatisme  $h = 3$ .
- Pour les 3 contraintes associées au guidage en translation, il faut rajouter 3 degrés de liberté sans augmenter la mobilité, ce qui est possible en remplaçant 3 des sphères-cylindres (n'importe lesquelles) en sphères-plans de même centre. Pour conserver le mouvement, il faut cependant éviter le pivotement autour de la direction verticale et on peut donc, entre autres, prendre la configuration suivante :
  - ne pas modifier la liaison en A qui reste donc une sphère-cylindre;
  - modifier les liaisons en C et D par des sphères-plans de mêmes centres et de normale verticale  $\vec{z}_0$ ;
  - modifier la liaison en B par une sphère-plan de même centre et de normale horizontale  $\vec{y}_0$ .
 La normale de la liaison en B empêche le pivotement de l'ensemble de guidage autour de la direction  $\vec{z}_0$ .



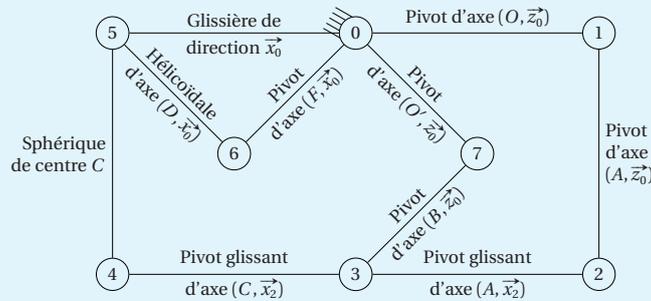
**Remarque**

Dans ce genre de système où la qualité et la « rigidité » du guidage est prioritaire, chercher une structure non contrainte (et donc un modèle isostatique) n'est pas très cohérent car la multiplication des zones de contact assure un guidage mieux maîtrisé même si la réalisation demande une grande précision dans l'usinage des pièces pour pouvoir assurer le montage.

**CORRIGÉS**

## EXERCICE 8

1) Le graphe des liaisons est le suivant :



2) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 10 - 8 + 1 = 3$  cycles,  $N_C = 5 \times 1 + 1 + 1 + 2 \times 2 + 3 = 14$  inconnues cinématiques et  $N_S = 5 \times 5 + 5 + 5 + 2 \times 4 + 3 = 46$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles (rappel : la liaison hélicoïdale est telle que  $n_c = 1$  et  $n_s = 5$  car 2 mouvements et 2 efforts sont proportionnels). Le modèle a 2 mobilités utiles (elles sont indiquées dans le texte de présentation) et 2 mobilités internes (rotation propre de la pièce (4) et mouvement de l'ensemble (2)-(3)-(7) lorsque (1) et (6) sont bloquées), soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 2 + 2 = 4$ .

On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 3 + 4 - 14 = 8 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 46 + 4 - 6 \times (8 - 1) = 8 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

3) Des contraintes géométriques peuvent être identifiées sur chacun des trois cycles indépendants (il ne s'agit que d'une proposition possible).

- Le cycle (6) - (5) - (0) induit 4 contraintes géométriques, toutes pouvant être réunies au niveau de l'hélicoïdale : 2 contraintes angulaires selon des axes de directions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  (respect du parallélisme) et 2 contraintes de longueur selon les directions  $\vec{y}_0$  et  $\vec{z}_0$  (respect de la distance) : pour information, ces contraintes pourraient être levées par la mise en place d'un écrou flottant (voir exercices 4 et 7).
- Le cycle (0) - (6) - (5) - (4) - (3) - (7) induit 1 contrainte géométrique de distance selon la direction  $\vec{z}_0$ .
- Enfin, le cycle (0) - (1) - (2) - (3) - (7) induit 2 contraintes géométriques : 1 contrainte de distance selon la direction  $\vec{z}_0$  et une contrainte angulaire selon un axe de direction  $\vec{y}_0$ .

## Corrigés des exercices d'approfondissement

### EXERCICE A

1) L'utilisation des éléments roulants dans la réalisation des liaisons permet d'avoir :

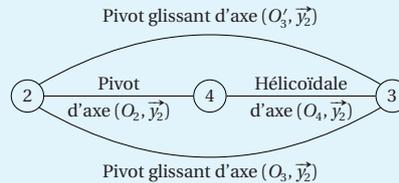
- des pertes mécaniques très faibles (le contact ponctuel au niveau des billes induit très peu de dissipation) ainsi qu'une réversibilité difficile à obtenir en cas de contacts surfaciques ;
- et une « rigidification » du guidage par multiplication des points de contact (chaque bille assure un guidage élémentaire et leur grand nombre crée de multiples liaisons en parallèle).

Ceci a pour effet de valider totalement les exigences suivantes :

- id = "3.1.6.2.1" (Rigidité élevée. Pas de jeu radial. Faible résistance au déplacement) ;
- id = "8" (Système réversible).

L'exigence id = "4" (Le système doit limiter son impact environnement (consommation énergétique, recyclage, bruit)) est également partiellement validée car la consommation énergétique est diminuée (pour information, le recyclage est également amélioré car l'enlèvement d'un élément roulant est facile).

2) Le graphe des liaisons est le suivant :



Sur ce modèle, on a un nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$  (2 boucles indépendantes),  $N_C = 1 + 1 + 2 \times 2 = 6$  inconnues cinématiques et  $N_S = 5 + 5 + 2 \times 4 = 18$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles et une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$  : on en déduit que le degré d'hyperstatisme est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 2 + 1 - 6 = 7 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 18 + 1 - 6 \times (3 - 1) = 7 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

3) Dans ces 7 contraintes géométriques mise en évidence par le calcul du degré d'hyperstatisme, 4 sont dues au nécessaire alignement des axes de la pivot et de l'hélicoïdale et pourraient être levées par l'utilisation d'un écrou flottant (voir exercices 4 et 7).

Les 3 contraintes géométriques résiduelles sont dues uniquement au guidage en translation par les deux pivots glissants d'axes parallèles; elles correspondent :

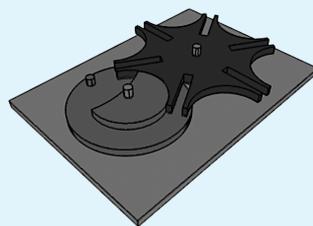
- à la distance entre les deux axes des pivots glissants (1 contrainte en longueur) : il faut que la distance entre  $O_3$  et  $O'_3$  soit la même sur la pièce (2) et sur la pièce (3);
- le parallélisme des deux axes des pivots glissants (2 contraintes angulaires) : toute rotation autour d'axes de direction  $\vec{x}_2$  ou  $\vec{z}_2$  d'un des axes des pivots glissants dégrade le parallélisme.

4) L'avantage d'un guidage avec deux éléments est une plus grande « raideur », ce qui permet de satisfaire l'exigence id = "3.1.6.2.1". L'inconvénient de cette structure de guidage est d'imposer des contraintes d'orientation et de distance à considérer lors de la fabrication et l'assemblage des pièces.

5) Pour rendre le modèle isostatique (ce qui n'est pas idéal ici, car il y a une forte exigence d'un guidage de qualité), il suffit de remplacer une des deux pivots glissants par une sphère-plan de centre celui de la pivot glissant (donc  $O_3$  ou  $O'_3$ ) et de normale  $\vec{z}_2$ .

### EXERCICE B

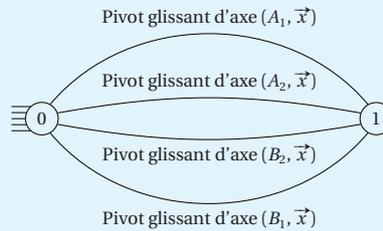
1) On peut utiliser une croix de Malte (ou un système d'indexation) associée à un moteur en boucle ouverte avec un indexeur comme indiqué en exemple sur la figure 1.43.



► Figure 1.43. Exemple de mécanisme de croix de Malte à 6 positions indexées.

2) Le moteur M1 commande le rapprochement des mains et le moteur M2 l'élévation. Les mains se déplacent parallèlement au sol à cause du mécanisme à quatre barres ce qui permet de s'assurer que le pot sera bien posé à plat sur le sol, ce qui permet d'éviter qu'il ne bascule.

3) Le graphe des liaisons est le suivant :



Sur ce modèle, on a un nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$  (3 boucles indépendantes),  $N_C = 4 \times 2 = 8$  inconnues cinématiques et  $N_S = 4 \times 4 = 16$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles et une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$  : on en déduit que le degré d'hyperstatisme est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 3 + 1 - (4 \times 2) = 11 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = (4 \times 4) + 1 - 6 \times (2 - 1) = 11 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

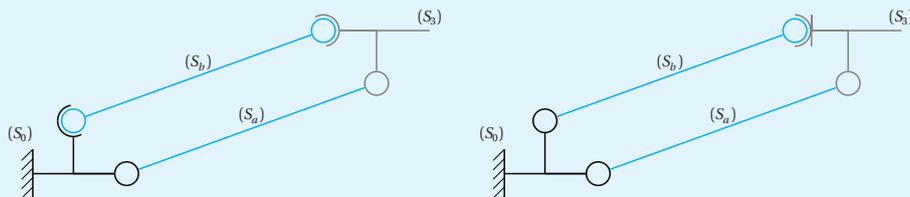
Le modèle retenu est fortement hyperstatique ce qui se traduira par des contraintes de montage à respecter lors de l'assemblage de l'ensemble.

4) Le modèle proposé comporte 1 unique boucle, 1 mobilité utile et pas de mobilité interne (donc une mobilité  $m = 1$ ) et 4 pivots, soit :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 1 - (4 \times 1) = 3 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = (4 \times 5) + 1 - 6 \times (4 - 1) = 3 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

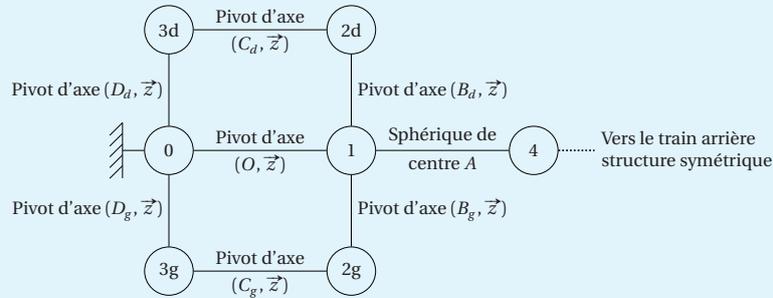
Une première solution (à gauche sur la figure ci-après) consisterait à mettre 2 liaisons sphériques sur la pièce ( $S_2$ ), ajoutant ainsi 1 mobilité interne (rotation propre d'une biellette) et 4 inconnues cinématiques : le modèle devient ainsi isostatique mais ce n'est pas idéal car on fragilise la liaison avec le bâti.

Une seconde solution (à droite sur la figure ci-après) est de mettre une liaison sphère-cylindre sur une des pivots avec ( $S_3$ ) : on ajoute 3 inconnues cinématiques sans mobilité interne et, de plus, les liaisons avec le bâti sont inchangées, ce qui est toujours le mieux quand c'est possible.



**EXERCICE C**

1) Le graphe de liaisons complété est le suivant :



**Conseils méthodologiques**

Dans une étude de théorie des mécanismes, on doit toujours se limiter aux zones bouclées : par conséquent, ici, il ne faut surtout pas tenir compte de la liaison sphérique entre (4) et (1), car elle n'est pas dans une zone bouclée.

2) Le modèle compte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$  cycles indépendants,  $N_C = 7 \times 1 = 7$  inconnues cinématiques et  $N_S = 7 \times 5 = 35$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles, une mobilité utile et une mobilité interne, soit une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$  : le degré d'hyperstatisme est donc :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 2 + 1 - 7 = 6 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 35 + 1 - 6 \times (6 - 1) = 6 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

3) Le nombre de boucles comme le nombre de mobilités utiles sont inchangés (soit  $\gamma = 2$  et  $m_u = 1$ ) mais, grâce aux sphériques, les biellettes (2g) et (2d) peuvent tourner autour d'elles-mêmes, soit une mobilité interne  $m_i = 2$  et donc une mobilité  $m = m_u + m_i = 3$ .

Par la modification des liaisons, on a  $N_C = 3 \times 1 + 4 \times 3 = 15$  inconnues cinématiques et  $N_S = 3 \times 5 + 4 \times 3 = 27$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles et le degré d'hyperstatisme est donc :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 2 + 3 - 15 = 0 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 27 + 3 - 6 \times (6 - 1) = 0 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Le modèle est donc bien devenu isostatique.

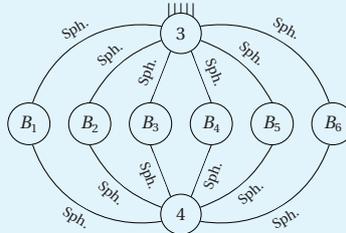
4) Les 6 contraintes géométriques viennent de l'obligation de parallélisme des axes des pivots de chaque boucle, ce qui implique 3 contraintes pour chaque boucle : en effet, sur chaque boucle, en supposant 3 pivots de même axe, il y a 3 contraintes (2 rotations dans le plan de normale  $\vec{z}$  et 1 translation selon  $\vec{z}$  : voir figure 1.28 page 35) pour la 4<sup>e</sup> pivot de la boucle pour que le système puisse se monter.

Par conséquent, en gardant 3 pivots et en modifiant la dernière en lui ajoutant 2 rotations + 1 translation, donc en la transformant en liaison sphère-cylindre, le modèle devient isostatique.

**CORRIGÉS**

## EXERCICE D

1) Le graphe des liaisons en se limitant à la zone comportant des boucles, donc sans tenir compte de la pièce (5), est le suivant (Sph. = liaison sphérique).

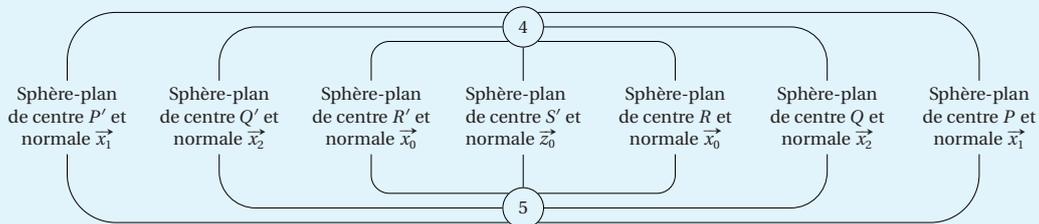


Sur ce modèle, on a un nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$  (5 boucles indépendantes),  $N_C = 12 \times 3 = 36$  inconnues cinématiques et  $N_S = 12 \times 3 = 36$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles et une mobilité  $m = m_u + m_i = 0 + 6 = 6$  (les biellettes peuvent tourner sur elle même) : on en déduit que le degré d'hyperstatisme est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 5 + 6 - 36 = 0 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 36 + 6 - 6 \times (8 - 1) = 0 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

2) Le modèle étant isostatique, il n'y a pas de contraintes géométriques et, si les liaisons sont parfaites (hypothèse par défaut), il est possible de déterminer toutes les composantes des actions mécaniques transmises dans les liaisons (ici, des glisseurs à trois composantes car ce sont des liaisons sphériques) : les efforts dans les barres ( $B_i$ ) reflètent donc bien l'action de l'eau sur (5).

3) Le graphe des liaisons est le suivant (toutes les liaisons sont des sphères plans).



Sur ce modèle, on a un nombre cyclomatique  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 7 - 2 + 1 = 6$  (6 boucles indépendantes),  $N_C = 7 \times 5 = 35$  inconnues cinématiques et  $N_S = 7 \times 1 = 7$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles et une mobilité  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$  (une seule mobilité utile en translation selon  $\vec{y}_0$  et aucune mobilité interne) : on en déduit que le degré d'hyperstatisme est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 6 + 1 - 35 = 2 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 7 + 1 - 6 \times (2 - 1) = 2 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$



### Conseils méthodologiques

Pour trouver la liaison cinématiquement équivalente d'un ensemble de liaisons en parallèle, deux méthodes sont possibles :

- la méthode dite « cinématique » : le mouvement autorisé par la liaison équivalente doit l'être par toutes les liaisons en parallèle et cette compatibilité cinématique est mise en œuvre par une égalité des torseurs cinématiques de chacune des liaisons ;

- la méthode dite « en effort » : tout effort transmis par au moins une des liaisons en parallèle le sera par la liaison équivalente et cette composition des efforts est mise en œuvre par une somme des torseurs des actions mécaniques transmissibles par chacune des liaisons. La méthode cinématique est toujours utilisable, que les liaisons soient parfaites ou non : elle est donc à privilégier si des frottements sont évoqués mais elle induit un système d'équations conséquent (pour  $n$  liaisons en parallèle, on aura  $6(n - 1)$  équations scalaires). La méthode en effort n'est utilisable que si les liaisons sont parfaites, ce qui implique puissance des inter-efforts nulle et donc une orthogonalité entre le torseur cinématique et le torseur des actions mécaniques transmissibles : en l'absence d'indication de pertes, cette méthode est à privilégier car elle entraîne un système d'équations plus simple à résoudre.

4) Les liaisons étant supposées parfaites, on utilise la méthode en effort, ce qui s'écrit (la lettre au-dessus de la flèche indique le centre de la liaison, le vecteur en-dessous indique la normale) :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{P-Q-R} 5}^{\mathcal{L}_{\text{éq}}} \right\} &= \left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{x_1} 5}^P \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{x_2} 5}^Q \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{x_0} 5}^R \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} X_P \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (P, \vec{x}_1)} + \left\{ \begin{array}{c} X_Q \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (Q, \vec{x}_2)} + \left\{ \begin{array}{c} X_R \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (R, \vec{x}_0)} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} X_P \vec{x}_1 + X_Q \vec{x}_2 + X_R \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_L = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{\text{éq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{\text{éq}} & 0 \end{array} \right\}_{L, b_0} \implies \{ \mathcal{V}_{5/4} \} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{L, b_0} \end{aligned}$$

Le torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison sphère-plan est invariant selon la normale : les normales des 3 sphères-plans passant par le point  $L$ , le moment de l'action mécanique transmissible est nul en  $L$  et la résultante équivalente, somme des 3 résultantes, ne comporte pas de composante selon la normale au plan, soit  $\vec{y}_0 = \vec{y}_1 = \vec{y}_2$ , d'où la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison cinématiquement équivalente.

La liaison cinématiquement équivalente est donc une sphère-cylindre de centre  $L$  et direction  $\vec{y}_0$ .

5) De la même façon qu'à la question précédente, les trois liaisons sphère-plan en  $P'$ ,  $Q'$  et  $R'$  vont créer une liaison sphère-cylindre de centre  $L'$  et normale  $\vec{y}_0$ .

L'ajout d'une liaison sphère-plan de centre  $S'$  et de normale  $\vec{z}_0$  va bloquer la rotation autour de  $\vec{y}_0$ , ce qui va rajouter un moment d'action mécanique transmissible en  $L'$  selon la direction  $\vec{y}_0$  : les torseurs des actions mécaniques transmissibles et cinématique de la liaison cinématiquement équivalente sont :

$$\left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{P'-Q'-R'-S'} 5}^{\mathcal{L}_{\text{éq}}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X'_{\text{éq}} & 0 \\ 0 & M'_{\text{éq}} \\ Z'_{\text{éq}} & 0 \end{array} \right\}_{L', b_0} \implies \{ \mathcal{V}_{5/4} \} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega'_x & 0 \\ 0 & V'_y \\ \omega'_z & 0 \end{array} \right\}_{L', b_0}$$

Cette liaison à 2 degrés de liberté en rotation et 1 degré de liberté en translation ne correspond pas à une des liaisons normalisées par la norme internationale.

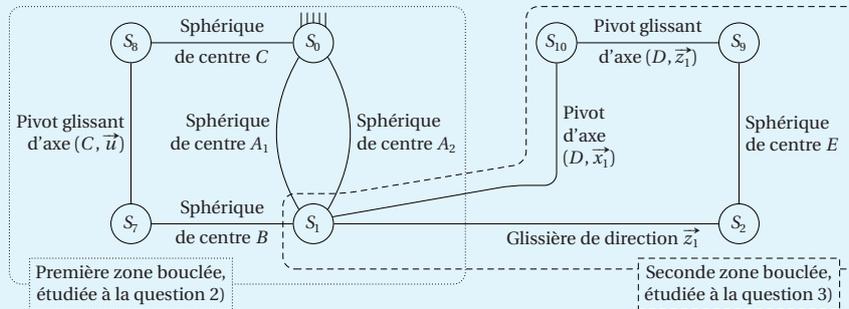
6) Les deux liaisons en  $L$  et  $L'$  étant elles-mêmes en parallèle, on peut de nouveau additionner les torseurs des actions mécaniques transmissibles, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{P-Q-R} 5}^{\mathcal{L}_{\text{éq}}} \right\} &= \underbrace{\left\{ \begin{array}{c|c} X_{\text{éq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{\text{éq}} & 0 \end{array} \right\}_{L, b_0}}_{\left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{P-Q-R} 5}^{\mathcal{L}_{\text{éq}}} \right\}} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c|c} X'_{\text{éq}} & 0 \\ 0 & M'_{\text{éq}} \\ Z'_{\text{éq}} & 0 \end{array} \right\}_{L', b_0}}_{\left\{ \mathcal{T}_{4 \xrightarrow{P'-Q'-R'-S'} 5}^{\mathcal{L}_{\text{éq}}} \right\}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} X_{\text{éq}} + X'_{\text{éq}} & hZ_{\text{éq}} \\ 0 & M'_{\text{éq}} \\ Z_{\text{éq}} + Z'_{\text{éq}} & -hX_{\text{éq}} \end{array} \right\}_{L', b_0} \implies \{ \mathcal{V}_{5/4} \} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & V''_y \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{L', b_0} \end{aligned}$$

La liaison cinématiquement équivalente est une glissière de direction  $\vec{y}_0$ .  
 Dans le cas de ce système particulier, le concepteur a laissé libre le déplacement de (5) par rapport à (4) selon la direction  $\vec{y}_0$  afin que la poussée d'Archimède opère librement : une liaison encastrement aurait fortement perturbé le niveau de flottaison naturel et donc les mesures dans les barres ( $B_i$ ).  
 Cette structure pour créer une glissière par multiples contacts ponctuels est plus facile à fabriquer que l'équivalent par contacts surfaciques plans : celle-ci exige en effet une très grande qualité d'usinage pour éviter les jeux ou, au contraire, les coincements (entre autres, risque d'arc-boutement).

### EXERCICE E

1) Le graphe des liaisons, fourni ci-après, comporte deux zones bouclées avec la pièce ( $S_1$ ) commune : l'étude de théorie des mécanismes doit être faite en deux temps, en étudiant séparément chaque zone.



2) Le modèle du sous-ensemble de la 1<sup>re</sup> zone bouclée compte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$  cycles indépendants,  $N_C = 2 + 4 \times 3 = 14$  inconnues cinématiques et  $N_S = 4 + 4 \times 3 = 16$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles, une mobilité utile (la sortie de la tige du vérin fait pivoter ( $S_1$ ) par rapport à ( $S_0$ )) et deux mobilités internes (le corps comme la tige du vérin peuvent pivoter sur eux-mêmes), soit  $m = m_u + m_i = 1 + 2 = 3$ . Le degré d'hyperstatisme de cette zone est donc :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 2 + 3 - 14 = 1 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 16 + 3 - 6 \times (4 - 1) = 1 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

L'unique contrainte géométrique correspond au guidage en rotation de ( $S_1$ ) par rapport à ( $S_0$ ) par les deux sphériques qui induit une contrainte sur la distance entre les deux centres, qui doit être identique sur les pièces ( $S_0$ ) et ( $S_1$ ) : en remplaçant une des deux sphériques par une sphère-cylindre de même centre et de direction  $\vec{z}_1$ , on lève la contrainte géométrique sur la distance et cette zone devient donc isostatique.

3) Le modèle du sous-ensemble de la 2<sup>de</sup> zone bouclée compte  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$  cycle,  $N_C = 1 + 3 + 2 + 1 = 7$  inconnues cinématiques,  $N_S = 5 + 3 + 4 + 5 = 17$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles, une mobilité utile (la sortie de la tige du vérin écarte et déplace le système à chenille en translation) et une mobilité interne (rotation propre de la tige ( $S_9$ )), soit  $m = m_u + m_i = 1 + 1 = 2$ . Le degré d'hyperstatisme de cette zone est donc :

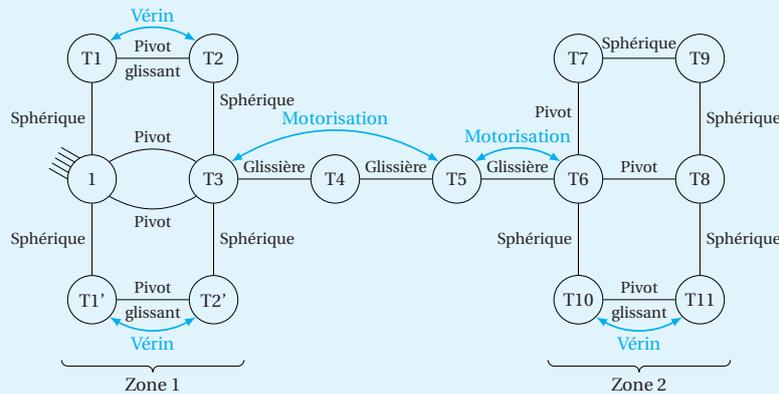
$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 1 + 2 - 7 = 1 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 17 + 2 - 6 \times (4 - 1) = 1 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Cette zone du modèle est donc hyperstatique de degré 1, il y a une contrainte de montage (point de vue géométrique) ou de détermination des actions mécaniques transmises dans les liaisons (point de vue en effort) : on identifie une contrainte de distance selon la direction  $\vec{x}_1$ .

Pour lever la contrainte de distance selon  $\vec{x}_1$ , on peut modifier la liaison pivot entre ( $S_{10}$ ) et ( $S_1$ ) par une liaison pivot glissant d'axe ( $D, \vec{x}_1$ ) ou bien remplacer la liaison sphérique de centre  $E$  par une liaison sphère-cylindre de centre  $E$  et de direction  $\vec{x}_1$  (dans les deux cas, ajout d'un degré de liberté en translation).

**EXERCICE F**

1) Le graphe des liaisons est le suivant (les effets des actionneurs ont été indiqués par des doubles flèches afin de mettre en évidence les motorisations de ce système).



2) Le degré d'hyperstatisme doit être calculé par somme des degrés d'hyperstatismes des deux zones bouclées mises en évidence sur le graphe précédent, soit  $h = h_1 + h_2$ .



**Attention!**

Bien que cela aboutisse parfois au même résultat, il ne faut jamais prendre en compte les chaînes dans un calcul de degré d'hyperstatisme car les formules de détermination du degré d'hyperstatisme  $h$  n'ont de sens que pour les zones comportant des boucles. De plus, ici, les mouvements de translation entre (T3) et (T4) et entre (T4) et (T5) sont liés (ce point est étudié dans un exercice de la partie énergétique) et le calcul du degré d'hyperstatisme du modèle en tenant compte de cette chaîne intermédiaire aboutit à un résultat erroné.

Les mobilités sont les suivantes.

- La mobilité utile est de  $m_{u1} = 1$  pour la zone 1 (les deux vérins inférieurs doivent être pilotés simultanément pour gérer le pivotement de la pièce (T3) par rapport au bâti) et de  $m_{u2} = 1$  pour la zone 2 (un unique actionneur gère le mouvement d'ouverture symétrique des deux pinces).
- La mobilité interne est de  $m_{i1} = 4$  pour la zone 1 (rotations des corps et tiges des deux vérins autour de l'axe du vérin) et  $m_{i2} = 3$  pour la zone 2 (rotations du corps et de la tige du vérin autour de l'axe du vérin + rotation de la pièce (T9) sur elle-même).

On peut alors déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle :

- Méthode 1 : point de vue géométrique

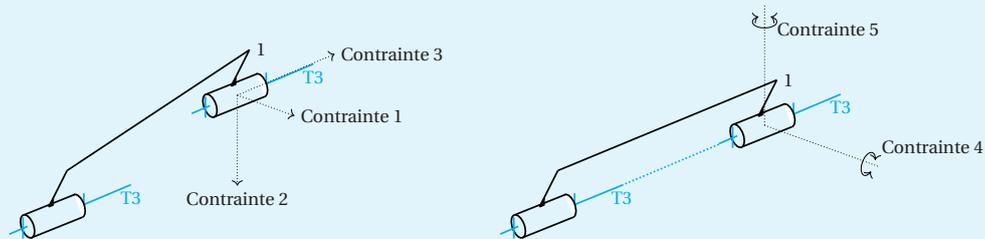
$$\begin{cases} h_1 = 6\gamma_1 + m_1 - N_{C1} = 6 \times 3 + (1 + 4) - (2 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 3) \\ h_2 = 6\gamma_2 + m_2 - N_{C2} = 6 \times 2 + (1 + 3) - (2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 3) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} h_1 = 5 \\ h_2 = 0 \end{cases} \implies h = h_1 + h_2 = 5$$

- Méthode 2 : point de vue en effort

$$\begin{cases} h_1 = N_{S1} + m_1 - 6(N_{P1} - 1) = 30 + 5 - 6 \times (6 - 1) = 5 \\ h_2 = N_{S2} + m_2 - 6(N_{P2} - 1) = 26 + 4 - 6 \times (6 - 1) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} h_1 = 5 \\ h_2 = 0 \end{cases} \implies h = h_1 + h_2 = 5$$

3) Il y a donc 5 contraintes géométriques de montage, uniquement sur le guidage en rotation du mât inférieur (T3) par rapport au bâti (0) par deux pivots :

- 3 contraintes de distance pour le positionnement relatif des centres des deux pivots ;
- 2 contraintes angulaires pour l'orientation relative des axes des deux pivots.



Il y a donc une pivot de trop, ce qui était attendu car le guidage en rotation peut être assuré par juste une liaison : le constructeur a doublé ce guidage pour le consolider fortement et permettre de supporter les efforts conséquents lors de la phase de transport d'un bateau.

Bien que ce soit ici à proscrire de part les efforts importants à gérer (qui impose une structure particulièrement « rigide »), il serait possible de rendre le modèle isostatique de la façon suivante.

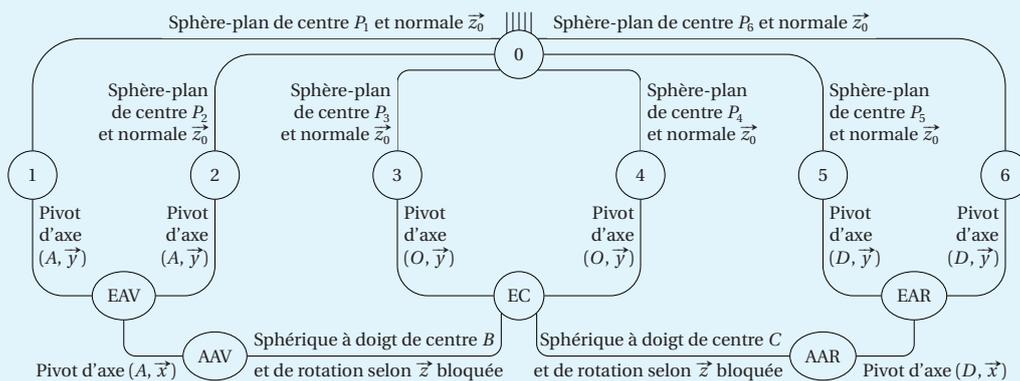
- Transformer une des pivots en sphérique de centre celui de la pivot.
- Transformer l'autre pivot en sphère-cylindre de centre celui de la pivot et direction celle de la pivot.

## EXERCICE G

1) Selon les mouvements (notés Mvt  $i$  ci-après), les pièces en rotation sont les suivantes :

- Mvt 1 : l'ensemble {(EAV) + les roues (1) et (2)} tourne en bloc autour de la direction  $(A, \vec{x})$ .
- Mvt 2 : l'ensemble {(EC) + les roues (3) et (4)} tourne en bloc autour de la direction  $(O, \vec{x})$ .
- Mvt 3 : l'ensemble {(EAR) + les roues (5) et (6)} tourne en bloc autour de la direction  $(D, \vec{x})$ .
- Mvt 4 : l'ensemble {(AAV) + (EAR) + les roues (5) et (6)} tourne en bloc autour de la direction  $(B, \vec{y})$ .
- Mvt 5 : l'ensemble {(AAR) + (EAR) + les roues (5) et (6)} tourne en bloc autour de la direction  $(C, \vec{y})$ .

2) Le graphe des liaisons est le suivant :



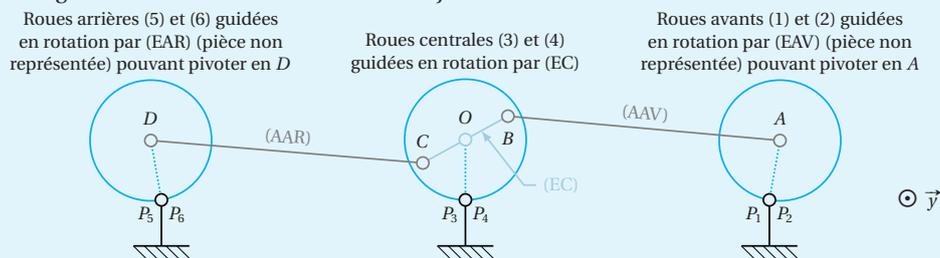
3) Les mobilités sont les suivantes :



**Conseils méthodologiques**

Pour trouver les mobilités sur cette structure très complexe et difficile à comprendre, le plus simple est de les bloquer au fur et à mesure jusqu'à ce que l'ensemble du mécanisme modélisé devienne totalement « figé ».

- Les 6 roues peuvent tourner autour de leur axe (guidage en rotation par une pivot) : on a donc 6 mobilités « internes » qu'on suppose bloquées dans la suite.
- Avec trois roues en contact avec un sol, on a l'équivalence d'une liaison appui-plan instantanée entre le châssis et le sol : on a donc 3 mobilités utiles (2 translations dans le plan de normale  $\vec{z}$  + 1 rotation autour d'un axe normal au plan), qu'on suppose bloquées dans la suite (et on va chercher à faire en sorte que les 3 autres roues soient elles-mêmes en contact avec le sol).
- Les ensembles (EAV) et (EAR) peuvent pivoter indépendamment autour de l'axe  $(O, \vec{x})$  par rapport à (EC) : on a donc 2 mobilités supplémentaires, qu'on suppose bloquées dans la suite.
- Les pièces (AAV) et (AAR) peuvent pivoter librement autour de leur direction longitudinale, respectivement  $(A, \vec{x})$  et  $(B, \vec{x})$  : on a donc 2 mobilités supplémentaires, qu'on suppose bloquées dans la suite.
- Les ensembles (AAV) et (AAR) peuvent pivoter autour des axes  $(B, \vec{y})$  ou  $(C, \vec{y})$  par rapport à (EC) mais cela n'aboutit qu'à une unique mobilité globale car ces deux rotations (qu'elles soient pilotées seules ou en même temps et de manière indépendante ou liée) entraînent toutes deux la même configuration, à savoir un châssis coudé. Sur la figure ci-après, on suppose les points de contact des roues avec le sol fixes (blocage des mobilités en rotation faite aux étapes précédentes) et on fait pivoter (AAV) autour de  $(B, \vec{y})$  : il apparaît clairement que (EC) va devoir pivoter autour de  $(O, \vec{y})$  ... avant de lui-même induire un pivotement de (AAR) autour de  $(C, \vec{y})$  par entraînement *via* la pièce (AAR) et ce pivotement dépend de la configuration de la structure et aboutit toujours à un châssis coudé.



Finalement, le modèle comporte 14 mobilités.

4) Le modèle a  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$  cycles indépendants,  $N_C = 8 \times 1 + 2 \times 2 + 6 \times 5 = 42$  inconnues cinématiques, soit  $N_S = 8 \times 5 + 2 \times 4 + 6 \times 1 = 54$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles. On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 5 + 14 - 42 = 2 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 54 + 14 - 6 \times (12 - 1) = 2 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Il y a donc 2 contraintes géométriques de montage : dans la configuration du modèle, il sera donc impossible d'assurer que les 6 roues soient en contact avec le sol (2 seront nécessairement soit soulevées, soit écrasées sur le sol), ce qui pose problème pour la motricité du système sur un sol dégradé.

5) On remplace les sphères-plans au points de contacts entre les roues et le sol par des sphériques.

**Attention!**

L'énoncé propose de remplacer les liaisons sphères-plans par des sphériques instantanées pour prendre en compte le roulement sans glissement au niveau des points de contact car l'hypothèse de roulement sans glissement impose que la vitesse de glissement au niveau des points de contact soit nulle : de manière instantanée, le torseur cinématique de la liaison sphère-plan ne contient pas de composantes de vitesse et est donc assimilable à celui d'une liaison sphérique, d'où la simplification.

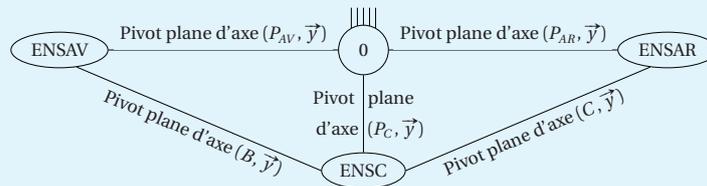
Avec cette évolution du modèle :

- le nombre cyclomatique est inchangé, soit  $\gamma = 5$ ;
  - les 6 mobilités en rotation des roues et les 3 mobilités du châssis avec le sol disparaissent, ainsi que la dernière mobilité en rotation, soit  $m = 4$ ;
  - le nombre d'inconnues cinématiques est  $N_C = 8 \times 1 + 2 \times 2 + 6 \times 3 = 30$  inconnues cinématiques, soit  $N_S = 8 \times 5 + 2 \times 4 + 6 \times 3 = 66$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles.
- On en déduit que le degré d'hyperstatisme du modèle est :

$$\begin{cases} h = 6\gamma + m - N_C = 6 \times 5 + 4 - 30 = 4 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 6(N_p - 1) = 66 + 4 - 6 \times (12 - 1) = 4 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

Le nouveau modèle comporte 4 contraintes géométriques de montage ou, si on prend le point de vue en effort, 4 composantes d'actions mécaniques transmises par les liaisons ne pourront pas être calculées.

6) Sachant que le roulement sans glissement implique une vitesse instantanée nulle et donc une modélisation par une pivot plane instantanée, le graphe des liaisons est le suivant :



**Attention!**

La liaison plane n'autorisant qu'une seule rotation, issue de la dégradation d'un modèle tridimensionnel (ici des sphériques à doigts et des sphériques instantanées) est parfois dénommée « articulation » pour éviter toute confusion avec la pivot normalisée, nécessairement tridimensionnelle : ce terme, déjà utilisé dans le texte, n'est pas utilisé ici.

Le modèle comportant  $\gamma = N_L - N_p + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$  cycles, deux mobilités (le pivotement de la roue centrale autour de  $(P_C, \vec{y})$ ) va entraîner les rotations des deux autres roues, de manière indépendante),  $N_C = 5 \times 1 = 5$  inconnues cinématiques, et donc  $N_S = 5 \times 2 = 10$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles, le degré d'hyperstatisme de ce modèle plan est :

$$\begin{cases} h = 3\gamma + m - N_C = 3 \times 2 + 2 - 5 = 3 & \text{(point de vue géométrique)} \\ h = N_S + m - 3(N_p - 1) = 10 + 2 - 3 \times (4 - 1) = 3 & \text{(point de vue en effort)} \end{cases}$$

On voit que ce degré d'hyperstatisme plan correspond à 3 composantes d'actions mécaniques transmises par les liaisons ne pouvant être déterminées, par exemple 3 des composantes d'effort avec le sol.



# PRÉPAS SCIENTIFIQUES

## MP/MP\* - PSI/PSI\*

## PT/PT\* - MPI/MPI\*

CONFORME AU  
NOUVEAU  
PROGRAMME

# Sciences industrielles de l'ingénieur

**L'ouvrage indispensable pour réussir et faire la différence aux concours**

### → TOUT LE COURS

Pour maîtriser **l'intégralité du programme** :

- toutes les définitions, exemples et démonstrations à connaître
- plus de 700 illustrations concrètes, schémas-bloc, schémas cinématiques et diagrammes

### → LA SYNTHÈSE DES NOTIONS

Pour retenir **l'essentiel du cours** tout au long de l'année et avant les concours

### → UN ENTRAÎNEMENT PROGRESSIF

Pour **vous préparer et vous tester efficacement** avec plus de 200 exercices inédits, adaptés ou issus de sujets de concours : vrai/faux, exercices d'application, exercices d'approfondissement et sujets type concours

### → TOUS LES CORRIGÉS DÉTAILLÉS

Pour **comprendre** les étapes de résolution des exercices et **acquérir** les bons réflexes



**OFFERT EN LIGNE**

- + **100 flashcards interactives** pour mémoriser autrement
- + **Toutes les synthèses à télécharger** pour des révisions nomades

Des auteurs au cœur de l'enseignement et des attentes des élèves en CPGE

**Dans la même collection**



Retrouvez notre collection  
complète ici :



ISBN : 978-2-311-21292-1



9 782311 212921