Maths en tableaux

PCSI

Sandra Courossé

ellipses

1. Les nombres	COURS	MÉTHODES ET COMMENTAIRES
	1.1 Nature d'un nombre $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$: ensemble des entiers naturels. $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$: ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels = ensemble des quotients d'entiers. $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux = ensemble des rationnels dont le dénominateur est une puissance de 10. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: ensemble des nombres irrationnels = ensemble des réels qui ne sont pas rationnels.	• Les entiers naturels sont les entiers positifs, zéro compris. • Les entiers relatifs sont les entiers naturels ou négatifs. • Les nombres rationnels sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers et $b \neq 0$. • Les nombres décimaux sont ceux de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec a et p entiers. Ils ont une écriture décimale (à virgule) finie. • Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers et $b \neq 0$ ($\sqrt{2}$ et π par exemple)
	1.2 Diviseurs d'un nombre entier non nul $$\left.\begin{array}{r} d\,divise\,N \\ d\,est\,diviseur\,de\,N \\ N\,est\,divisible\,par\,d \\ N\,est\,multiple\,de\,d \end{array}\right\} signifie\,que:$$ $$N = d \times k\ avec\ k\ entier$$	N est divisible : • Par 2 si N finit par 0, 2, 4, 6 ou 8 (N est pair). • Par 3 si la somme des chiffres de N est divisible par 3. • Par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres de N est divisible par 4. • Par 5 si N finit par 0 ou 5. • Par 6 si N fest divisible par 2 et 3. • Par 9 si la somme des chiffres de N est divisible par 9.
	1.3 Valeur approchée d'un réel On donne une valeur du nombre avec arrêt à la décimale demandée. • par défaut : au plus bas • par excès : au plus haut • sans précision : on prend au plus près, cela s'appelle l'arrondi.	La valeur approchée s'applique essentiellement à des nombres dont l'écriture à virgule a une infinité de décimales. Exemple : $\frac{3}{7} = 0.4285714...$ Une valeur approchée au millième est • par défaut : 0.428 • par excès : 0.429 • l'arrondi : 0.429 car après le 8 des millièmes il y a un 5 donc on arrondit par excès (cela aurait été le cas pour 6 ou 7 ou 8 ou 9).

EXERCICES

Exercice 1 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :
a) -0.5 est un nombre rationnel.
b) $\frac{2}{5}$ est un nombre décimal.
c) $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
d) Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
e) Le produit de deux nombres irrationnels est un irrationnel.

Exercice 2 a) Donner les diviseurs de 10485 compris entre 1 et 10.
b) Même question avec 372.
c) Donner tous les diviseurs de 72.

Exercice 3 Soit N un entier naturel.
a) Comment peut-on écrire N si N est pair ?
b) Même question si N est impair.

Exercice 4 a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de π par excès puis par défaut, enfin l'arrondi.
b) Même question avec $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

FOCUS

• Pour répondre à un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) dans lequel on doit répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :
- si la réponse est VRAI, vous devez argumenter par une démonstration ou éventuellement un schéma lorsque cela s'y prête.
- si la réponse est FAUX, il faut fournir un contre-exemple, c'est à dire une situation dans laquelle l'affirmation n'est pas vérifiée.

• Lorsque vous cherchez tous les diviseurs d'un nombre N, soyez méthodique : vous commencez par 1 (le plus petit) auquel "correspond" le diviseur N (le plus grand), puis vous examinez si 2 est diviseur, si c'est le cas, $\frac{N}{2}$ l'est aussi. Vous progressez ainsi jusqu'à la partie entière de $\sqrt{N}$.

	COURS	MÉTHODES ET COMMENTAIRES
2. Les puissances	**2.1 Règles sur les puissances** a et b réels, n et m dans $\mathbb{N}$ $a^n = a \times a \times a ... \times a$ (n facteurs) $a^0 = 1$ **par convention** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^m)^n = a^{m \times n}$ $(ab)^n = a^n \times b^n$ $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $10^5 = 100000$ (5 zéros) $10^{-3} = 0,001$ (3 chiffres après la virgule)	• Appliquer correctement toutes les règles au sein d'un calcul, si vous êtes tentés d'utiliser une "règle" qui ne se trouve pas dans le cours, c'est qu'elle n'existe pas ! • Penser à écrire certains nombres comme des puissances pour simplifier multiplications ou quotients (par exemple $8 = 2^3$).
	2.2 Écriture scientifique d'un nombre décimal On dit qu'un nombre décimal est écrit en notation scientifique lorsqu'il est sous la forme : $$a \times 10^n$$ où a est un réel avec un chiffre avant la virgule entre 1 et 9, et $n \in \mathbb{Z}$.	Pour obtenir l'écriture scientifique, on déplace la virgule pour se ramener à un nombre décimal avec une partie entière entre 1 et 9 et on "compense" par une puissance de 10. Exemple : $0,00275 = 2,75 \times 10^{-3}$. Cette écriture permet de comparer les ordres de grandeur entre plusieurs décimaux (en chimie notamment).
3. Les racines carrées	**3.1 Propriétés fondamentales** • Si a un réel positif ou nul alors $\sqrt{a}$ est bien définie telle que : $$\sqrt{a} \geqslant 0 \text{ et } (\sqrt{a})^2 = a$$ • $\sqrt{a^2} = a \; si \; a \geqslant 0 \; et \; -a \; si \; a \leqslant 0$ • $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \; avec \; a \geqslant 0 \; et \; b \geqslant 0$ • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \; avec \; a \geqslant 0 \; et \; b > 0$	• Il faudra garder à l'esprit lorsqu'on aura une expression algébrique (avec des x) sous une racine, qu'elle doit être positive ou nulle. • Pour simplifier une racine carrée, on décompose le radicande (le nombre sous la racine) en faisant apparaître un carré (on essaie 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81...). Exemple : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ car $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
	3.2 Calculs avec des racines carrées • Par principe on ne laisse pas un résultat avec une racine carrée au dénominateur. • Pour tout $a \geqslant 0$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et donc $\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$, une racine carrée est donc une puissance. • $x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = (x+y)\sqrt{a}$ avec x, y et a des réels et $a \geqslant 0$.	• Pour "enlever" une racine carrée lorsqu'elle est au dénominateur, on multiplie dénominateur et numérateur par la racine. Exemple : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. • On ne peut pas additionner des racines si ce ne sont pas les mêmes (du même nombre).

EXERCICES

Exercice 5 Simplifier sans calculatrice :

$A = 0^{1898}$ $\quad B = 1^{20}$ $\quad C = (4,1)^0$ $\quad D = (\frac{2}{3})^7 \times (\frac{3}{2})^4$ $\quad E = (4 \times 10^{-3})^3$

$F = \dfrac{(2\times 3)^7}{36^3}$ $\quad G = \dfrac{40^3 \times 30^2 \times 15^4}{2^4 \times 9^2 \times 5^3}$ $\quad H = \dfrac{\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{7}\right)^2}{\left(\frac{8}{10}\right)^3 \times \left(\frac{14}{8}\right)^3}$

$I = \dfrac{27^n \times 2 \times 4^n \times 3^{n-1}}{3 \times 2^{n+2} \times 9^n}$ où $n \in \mathbb{Z}$ $\quad J = 2^{n+1} - 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$

$K = 4^{n+1} + 3 \times (2^n)^2 - 7 \times 2^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}$

Exercice 6 Écrire en notation scientifique :

a) $368,451$ $\quad$ b) 4081 $\quad$ c) $0,1098$ $\quad$ d) $0,000099$

Exercice 7 Simplifier au maximum :

$A = (2\sqrt{2})^2$ $\quad B = \sqrt{405}$ $\quad C = \sqrt{112}$ $\quad D = \sqrt{\frac{25}{36}}$ $\quad E = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$F = \sqrt{32} - \sqrt{108} + 6\sqrt{50}$ $\quad G = 2\sqrt{63} - 3\sqrt{567} + 3\sqrt{343}$

FOCUS

- Pour simplifier une écriture fractionnaire avec des puissances, on décompose d'abord numérateur et dénominateur en produit de puissances de nombres premiers (puissances de 2, 3, 5, 7 etc...)

- Dans une expression où il y a des puissances d'un même nombre à simplifier, on factorise par le terme à la plus petite puissance.

Exemple : $3^{n+2} - 3^{n+1} + 3^n = 3^n(3^2 - 3 + 1) = 7 \times 3^n$

4. Développer et factoriser

COURS

4.1 Développer une expression algébrique

a, b, c et d des réels.

1) Par les règles de distributivité.

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

2) Par les identités remarquables.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• Il est nécessaire de développer lorsque l'on ne peut pas calculer davantage à l'intérieur de parenthèses.

• Chaque terme a, b, c ou d est considéré avec son signe (donc peut être négatif).

• Il faut apprendre par coeur les identités remarquables afin d'aller plus vite dans un calcul.

• La troisième identité remarquable sert notamment à simplifier des fractions avec au dénominateur une somme ou différence de deux radicaux; il faut alors multiplier numérateur et dénominateur par "l'expression conjuguée". Par exemple, si on a au dénominateur $1+\sqrt{2}$, alors l'expression conjuguée est $1-\sqrt{2}$ (voir exercice 10).

COURS

4.2 Factoriser une expression algébrique

On reprend les formules du 4.1 que l'on écrit "à l'envers", cela permet de factoriser :

1) Par la mise en évidence de facteur(s) commun(s).

2) Par la reconnaissance du résultat d'identités remarquables.

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• Pour le 1) on factorise le membre que l'on retrouve en commun dans chaque terme de la somme.

• Pour le 2) on reconnaît l'une des trois formes :
$a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$ ou a^2-b^2 et on peut donc les remplacer par $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$ ou $(a-b)(a+b)$.

5. Équations simples

COURS

5.1 Équations du premier degré

$$(E)\ ax+b=0 \text{ avec } a, b \text{ et } x \text{ réels, } a\neq 0$$

$$\mathscr{S} = \{-\frac{b}{a}\}$$

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• Pour résoudre une équation du premier degré où x est l'inconnue, on isole les x à gauche de l'égalité et tout ce qui ne contient pas de x à droite.

• L'inconnue pourra être n'importe quelle lettre de l'alphabet (même grecque si l'on veut).

COURS

5.2 Équations "produit nul"

$$(E)\ (ax+b)(cx+d)=0 \text{ avec } a, b, c, d \text{ et } x \text{ réels, } a\neq 0 \text{ et } c\neq 0$$

$$\mathscr{S} = \{-\frac{b}{a}; -\frac{d}{c}\}$$

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• On se ramène à une équation "produit nul" en :
- passant tous les termes à gauche de l'égalité (par additions et soustractions)
- factorisant le membre de gauche

• Ce qui permet de résoudre c'est qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

EXERCICES

Exercice 8 Développer et réduire :
$A = (\frac{1}{2}x-3)7$ $\quad B = (-2x+3)(\frac{1}{3}x+2)$ $\quad C = (\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})^2$ $\quad D = (-\frac{1}{3}x+4)^2$
$E = 2x(\sqrt{2}x-1)^2$ $\quad F = (4\sqrt{3}-3)(4\sqrt{3}+3)$ $\quad G = (3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$

Exercice 9 Deux nombres ont pour somme 314 :
De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun d'eux?

Exercice 10 Simplifier les fractions :
$A = \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}$ $\quad B = \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} + \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

Exercice 11 Factoriser :
$A = 3x^2+9x$ $\quad B = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$ $\quad C = (3x-7)^2-(4x+1)(3x-7)$
$D = 4x^2+4x+1$ $\quad E = 3x^2-12x+12$ $\quad F = x^2-7$ $\quad G = (2x+1)^2-(2-x)^2$
$H = 4x^2+12x+9$ $\quad I = 2x^2-4$ $\quad J = x^2-x^4$ $\quad K = (x^2+2\sqrt{2}x+1)^2-1$

Exercice 12 Résoudre les équations :
$(E_1) : -6x+7 = 3-2x$ $\quad (E_2) : \frac{y-3}{2} = 2y+1$ $\quad (E_3) : 2(\frac{t}{3}-1) = t-\frac{1}{3}$

Exercice 13 Résoudre les équations :
$(E_1) : -x^2+ax = 0$ (x est l'inconnue)
$(E_2) : 4y^2-b^2 = 0$ (y est l'inconnue)
$(E_3) : 9a^2 = 6a-1$

FOCUS

• Identités remarquables.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

• Pour factoriser, dans l'ordre on cherche d'abord le(s) facteur(s) commun(s) puis, quand on les a épuisés, on regarde si c'est une identité remarquable.

• À part pour les équations de degré 1, pour celles de degré 2 ou plus, on passe tous les termes d'un côté du signe =, afin de résoudre $A(x) = 0$. On cherche alors à factoriser $A(x)$.

Exercice 1 a) $\boxed{\text{Vrai}}$ car $-0,5=\frac{-1}{2}$. b) $\boxed{\text{Vrai}}$ car $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$.

c) $\boxed{\text{Faux}}$ car 10 n'est pas divisible par 3.

d) $\boxed{\text{Vrai}}$ car $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ avec a, b, c et d des entiers, $b\neq 0$, $d\neq 0$ donc $\frac{ac}{bd}$ est bien une fraction d'entiers avec $bd\neq 0$.

e) $\boxed{\text{Faux}}$ car par exemple $\sqrt{2}$ est un irrationnel (sera démontré au chapitre suivant) et pourtant $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ et 2 est un rationnel $(2=\frac{2}{1})$.

Exercice 2 a) Diviseurs de 10485 compris entre 1 et 10 : $\boxed{1\,;3\,;5\,;9}$

1 (divise tout nombre entier)

3 car $1+0+4+8+5=18$ et 18 est divisible par 3.

5 car 10485 termine par 5.

9 car $1+0+4+8+5=18$ et 18 est divisible par 9.

Par ailleurs, ne sont pas diviseurs de 10485 :

2 car 10485 n'est pas pair.

4, 6, 8 et 10 car 2 n'est déjà pas diviseur.

7 car on essaye et cela ne marche pas !

b) Diviseurs de 372 compris entre 1 et 10 : $\boxed{1\,;2\,;3\,;4\,;6}$

c) Tous les diviseurs de 72 :

$$\boxed{\underbrace{1;2;3;4;6;8}_{\text{"petits diviseurs"}};\underbrace{9;12;18;24;36;72}_{\text{"grands diviseurs"}}}$$

Il faut chercher les diviseurs de façon méthodique : le plus petit est 1 auquel correspond 72 car $72=1\times 72$, puis le suivant est 2 auquel correspond 36 car $72=2\times 36$ etc ...

Exercice 3 a) $\boxed{N \text{ est pair} \iff \exists k\in\mathbb{N},\ N=2k}$

b) $\boxed{N \text{ est impair} \iff \exists k\in\mathbb{N},\ N=2k+1}$

Exercice 4 a) $\pi=3,14159...$ donc :

$\boxed{\pi=3,1416 \text{ à } 10^{-4} \text{ près par excès}}$

$\boxed{\pi=3,1415 \text{ à } 10^{-4} \text{ près par défaut, l'arrondi de } \pi \text{ à } 10^{-4} \text{ est } 3,1416}$

b) $\sqrt{2}=1,414213...$ donc :

$\boxed{\sqrt{2}=1,41422 \text{ à } 10^{-5} \text{ près par excès}}$

$\boxed{\sqrt{2}=1,41421 \text{ à } 10^{-5} \text{ près par défaut, l'arrondi de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-5} \text{ est } 1,41421}$

Exercice 5 $\boxed{A=0}$ $\boxed{B=1^{20}=1}$ $\boxed{C=(4,1)^0=1}$ par convention

$D=(\frac{2}{3})^7\times(\frac{3}{2})^4=\frac{2^7\times 3^4}{3^7\times 2^4}=2^{7-4}\times 3^{4-7}=2^3\times 3^{-3}=(\frac{2}{3})^3=\boxed{\frac{8}{27}}$

$E=(4\times 10^{-3})^3=4^3\times(10^{-3})^3=\boxed{64\times 10^{-9}}$ $F=\frac{(2\times 3)^7}{36^3}=\frac{6^7}{(6^2)^3}=\frac{6^7}{6^6}=\boxed{6}$

$$G=\frac{40^3\times 30^2\times 15^4}{2^4\times 9^2\times 5^3}=\frac{(2^3\times 5)^3\times(3\times 5\times 2)^2\times(3\times 5)^4}{2^4\times(3^2)^2\times 5^3}=\boxed{2^7\times 3^2\times 5^6}$$

$$H=\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^3\times\left(-\frac{4}{7}\right)^2}{\left(\frac{8}{10}\right)^3\times\left(\frac{14}{8}\right)^3}=-\frac{\frac{2^3\times(2^2)^2}{5^3\times 7^2}}{\frac{\cancel{(2^3)^3}\times\cancel{2^3}\times 7^3}{\cancel{2^3}\times 5^3\times\cancel{(2^3)^3}}}=-\frac{2^7}{\cancel{5^3}\times 7^2}\times\frac{\cancel{5^3}}{7^3}=\boxed{-2^7\times 7^{-5}}$$

$$I=\frac{27^n\times 2\times 4^n\times 3^{n-1}}{3\times 2^{n+2}\times 9^n}=\frac{(3^3)^n\times 2\times(2^2)^n\times 3^{n-1}}{3\times 2^{n+2}\times(3^2)^n}=3^{3n+n-1-1-2n}\times 2^{1+2n-n-2}$$

donc $\boxed{I=2^{n-1}\times 3^{2n-2}}$ $J=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=\boxed{2^n}$

$K=4^{n+1}+3\times(2^n)^2-7\times 2^{2n}=2^{2n+2}+3\times 2^{2n}-7\times 2^{2n}=2^{2n}(2^2+3-7)=\boxed{0}$

Exercice 6 a) $368,451=\boxed{3,68451\times 10^2}$ b) $4081=\boxed{4,081\times 10^3}$

c) $0,1098=\boxed{1,098\times 10^{-1}}$ d) $0,000099=\boxed{9,9\times 10^{-5}}$

Exercice 7 $\boxed{A=(2\sqrt{2})^2=8}$ $B=\sqrt{405}=\sqrt{81\times 5}=\sqrt{81}\times\sqrt{5}=\boxed{9\sqrt{5}}$

$C=\sqrt{112}=\sqrt{16\times 7}=\sqrt{16}\times\sqrt{7}=\boxed{4\sqrt{7}}$ $D=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\boxed{\frac{5}{6}}$

$E=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$F=\sqrt{32}-\sqrt{108}+6\sqrt{50}=\sqrt{16\times 2}-\sqrt{36\times 3}+6\sqrt{25\times 2}=4\sqrt{2}-6\sqrt{3}+30\sqrt{2}$

donc $\boxed{F=34\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$

$G=2\sqrt{63}-3\sqrt{567}+3\sqrt{343}=2\sqrt{9\times 7}-3\sqrt{81\times 7}+3\sqrt{49\times 7}$

donc $\boxed{G=6\sqrt{7}-27\sqrt{7}+21\sqrt{7}=0}$

Exercice 8 $A=(\frac{1}{2}x-3)7=\boxed{\frac{7}{2}x-21}$

$B=(-2x+3)(\frac{1}{3}x+2)=-\frac{2}{3}x^2-4x+x+6=\boxed{-\frac{2}{3}x^2-3x+6}$

$C=(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})^2=(\frac{1}{2}x)^2+2\times(\frac{1}{2}x)\times\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2=\boxed{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}}$

$D=(-\frac{1}{3}x+4)^2=(-\frac{1}{3}x)^2+2\times(-\frac{1}{3}x)\times 4+4^2=\boxed{\frac{1}{9}x^2-\frac{8}{3}x+16}$

$E = 2x(\sqrt{2}x-1)^2 = 2x(2x^2-2\sqrt{2}x+1) = \boxed{4x^3-4\sqrt{2}x^2+2x}$

$F = (4\sqrt{3}-3)(4\sqrt{3}+3) = (4\sqrt{3})^2-3^2 = 48-9 = \boxed{39}$

$G = (3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{5})^2 - 2\times 3\sqrt{5}\times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = \boxed{57-12\sqrt{15}}$

Exercice 9 On note a et b les nombres cherchés.

$\underbrace{(a+9)\times(b+9)}_{\text{nouveau produit}} - \underbrace{a\times b}_{\text{ancien produit}} = ab+9a+9b+81-ab$

$= 9(a+b)+81 = 9\times 314+81 = \boxed{2907}$

Exercice 10 $A = \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \boxed{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}}$

$$B = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} + \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{(\sqrt{n}+1)^2+(\sqrt{n}-1)^2}{(\sqrt{n})^2-1^2} = \frac{2n+2}{n-1} = \boxed{\frac{2(n+1)}{n-1}}$$

Exercice 11 $A = 3x^2+9x = \boxed{3x(x+3)}$ $B = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \boxed{\frac{1}{2}x(x-\frac{1}{2})}$

$C = (3x-7)^2-(4x+1)(3x-7) = (3x-7)(3x-7-(4x+1)) = \boxed{-(3x-7)(x+8)}$

$D = 4x^2+4x+1 = \boxed{(2x+1)^2}$

$E = 3x^2-12x+12 = 3(x^2-4x+4) = \boxed{3(x-2)^2}$

$F = x^2-7 = \boxed{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}$

$G = (2x+1)^2-(2-x)^2 = [(2x+1)+(2-x)][(2x+1)-(2-x)] = \boxed{(x+3)(3x-1)}$

$H = 4x^2+12x+9 = \boxed{(2x+3)^2}$ $I = 2x^2-4 = 2(x^2-2) = \boxed{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$

$J = x^2-x^4 = x^2(1-x^2) = \boxed{x^2(1-x)(1+x)}$

$K = (x^2+2\sqrt{2}x+1)^2-1 = (x^2+2\sqrt{2}x+1-1)(x^2+2\sqrt{2}x+1+1)$

donc $\boxed{K = x(x+2\sqrt{2})((x+\sqrt{2})^2}$

Exercice 12 $(E_1) : -6x+7 = 3-2x \iff -4x = -4 \iff \boxed{x=1}$

$(E_2) : \frac{y-3}{2} = 2y+1 \iff y-3 = 2(2y+1) \iff -3y = 5 \iff \boxed{y = -\frac{5}{3}}$

$(E_3) : 2(\frac{t}{3}-1) = t-\frac{1}{3} \iff \frac{2}{3}t-2 = t-\frac{1}{3} \iff -\frac{1}{3}t = \frac{5}{3} \iff \boxed{t=-5}$

Exercice 13 $(E_1) : -x^2+ax = 0 \iff x(-x+a) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = a}$

$(E_2) : 4y^2-b^2 = 0 \iff (2y-b)(2y+b) = 0 \iff \boxed{y = \frac{b}{2} \text{ ou } y = -\frac{b}{2}}$

$(E_3) : 9a^2 = 6a-1 \iff 9a^2-6a+1 = 0 \iff (3a-1)^2 = 0 \iff \boxed{a = \frac{1}{3}}$

1. Langage de base

COURS	MÉTHODES ET COMMENTAIRES
1.1 Qu'est-ce qu'une proposition (ou assertion) ? • **Une proposition mathématique** est une affirmation qui peut être vraie ou fausse. En revanche, elle est l'un ou l'autre mais jamais les deux à la fois. • On la note souvent par une lettre majuscule comme *proposition P* par exemple.	• Exemple : Soit P : "$3x^2+5x-2=0$". La proposition P est vraie pour $x=-2$ et fausse pour $x=0$ car $-2\neq 0$. • Pour montrer qu'une proposition est fausse, on peut donner un contre-exemple c'est à dire une situation qui la contredit.
1.2 Négation d'une proposition • **La négation d'une proposition P** est l'affirmation contraire de P, on l'appelle **non P**. • Lorsque P est vraie, non P est fausse. Lorsque P est fausse, sa négation est vraie.	• Soit P : "$3x^2+5x-2=0$". non P : "$3x^2+5x-2\neq 0$". Pour $x=0$, non P est vérifiée mais P est fausse. • Pour déterminer la négation d'une proposition, penser que si l'une est vraie, l'autre est fausse.
1.3 Proposition ET/OU Soient P et Q deux propositions. • La proposition "**P et Q**" est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies. • La proposition "**P ou Q**" est vraie lorsqu'au moins l'une des deux propositions est vraie (l'une, l'autre ou les deux). • Lois de Morgan : 1) **La négation de "P et Q"** est "**non P ou non Q**". 2) **La négation de "P ou Q"** est "**non P et non Q**".	Soient P : "$x\geqslant -1$" et Q : "$x<2$". • P et Q : "$-1\leqslant x<2$". Elle est vraie pour $x=0$ et fausse pour $x=-10$ par exemple. • P ou Q : "$x\geqslant -1$ ou $x<2$". Elle est vraie pour tout x réel car la réunion des intervalles $]-\infty;2[$ et $[-1;+\infty[$ est l'ensemble des réels. • La négation de "P et Q" est "$x<-1$ ou $x\geqslant 2$. Elle est vraie pour $x=-2$ et fausse pour $x=0$ par exemple. • La négation de "P ou Q" est "$x<-1$ et $x\geqslant 2$". Elle est fausse pour tout x réel.
1.4 Les quantificateurs • Les expressions telles que "**Quel que soit**..." et "**Il existe au moins un**..." sont appelées quantificateurs car elles servent à préciser combien d'éléments vérifient une propriété. • Notation mathématique : "Quel que soit..." ou bien "Pour tout..." se notent $\forall$ "Il existe au moins un..." se note $\exists$ "Il existe un unique..." se note $\exists!$ • Lorsqu'on dit "Quel que soit x..." cela signifie que la propriété doit être vraie pour tous les x (d'un certain ensemble). "Il existe au moins un x..." sous-entend que la proposition est vérifiée pour un x ou plus d'un ensemble donné.	• Pour démontrer "Il existe au moins un...", il suffit de trouver UN exemple qui rend la propriété vraie. Par exemple "Il existe au moins un entier divisible par 3 et 5" est vraie car 15 admet 3 et 5 pour diviseurs. • Pour prouver "Pour tout...", il faut envisager tous les cas donc un exemple seul ne suffit plus. Par exemple "$x^2\geqslant 0$, pour tout x réel" est vraie car un carré est toujours positif ou nul. • Pour démontrer que "Pour tout..." est faux, il suffit de trouver un contre-exemple c'est à dire un cas qui rend la proposition fausse. • Attention, on ne mélange le langage usuel avec les quantificateurs au sein d'une même phrase, vous devez choisir entre le tout mathématiques ou bien le tout français.

EXERCICES

Exercice 1 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?
P : "$|x-y|=x-y$ pour tous x et y réels".
Q : "$|x^2|=|x|^2$ pour tout x réel".
R : "Lorsque a et c sont des réels de signes opposés, a non nul, alors le polynôme ax^2+bx+c admet une ou deux racines réelles".
T : "Tous les nombres premiers sont impairs".

Exercice 2 Donner la négation des propositions suivantes :
Q : "$x<2$".
R : "x est positif ou nul".
S : "Le triangle ABC est isocèle en A".

Exercice 3 Soient les propositions :
P : "$2<6$"
Q : "Tout rectangle est un carré".
Dire si "P et Q" et "P ou Q" sont vraies ou fausses en justifiant.

Exercice 4 Soit u définie par $u_n=2n^2-n-2$.
a) Exprimer u_{n+1} puis $u_{n+1}-u_n$ en fonction de n.
b) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
P : "Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\neq u_n$".
Q : "Il existe un entier naturel n tel que $u_{n+1}=u_n+1$".

Exercice 5 Compléter :
non ($\exists x\in E$ tel que P) $\Longleftrightarrow$...
non ($\forall x\in E$ tel que P) $\Longleftrightarrow$...
non ($\forall x\in A,\ x\leqslant 10$) $\Longleftrightarrow$...
non ($-1<x\leqslant 3$) $\Longleftrightarrow$...

FOCUS

• Équations du second degré dans $\mathbb{R}$:

$$(E)\ ax^2+bx+c=0$$

où a, b et c réels, $a\neq 0$
$\Delta=\ b^2-4ac$ est le discriminant.
- Si $\Delta>0$ alors :
l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta=0$ alors :
(E) admet une solution réelle (double) $x_0=\frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta<0$ alors :
(E) n'admet pas de solution réelle.

• Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si et seulement s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même.

COURS	MÉTHODES ET COMMENTAIRES
2.1 L'implication Soient P et Q deux propositions. • La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit "**P implique Q**". Elle est vraie lorsque, **si** P est vraie **alors** Q est vraie. Elle est fausse lorsque, P est vraie mais Q est fausse. • Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que **P est une condition suffisante pour Q** et **Q est une condition nécessaire à P**. Exemple : "J'habite Bordeaux ⇒ J'habite en France" est vraie . Habiter Bordeaux est une condition suffisante pour habiter en France (car Bordeaux est une ville française) et il est nécessaire d'habiter en France pour habiter Bordeaux (aucune chance d'être bordelais en vivant aux Etats-Unis!). • $P \Rightarrow Q$ se traduit aussi par : "**Pour avoir Q** vraie, **il suffit d'avoir P** vraie". *ou encore* "**Pour que P** soit vraie, **il faut que Q** soit vraie".	• Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vérifiée et on démontre qu'alors Q est vraie. Exemple : "$x > -1 \Rightarrow \sqrt{2x+3} > 1$" est vraie. En effet, si $x > -1$ alors $2x > -2$ donc $2x+3 > 1$. Ainsi $\sqrt{2x+3} > 1$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. • Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est à dire une situation dans laquelle P est vraie mais Q est fausse. Exemple : "$x^2 \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 2$" est fausse car si $x = -3$ alors $x^2 = 9$ donc $x^2 \geqslant 4$ est vérifiée mais $x \geqslant 2$ est fausse. • Un exemple d'implication vraie est le théorème de Pythagore : "**Si** ABC est un triangle rectangle en A **alors** $BC^2 = AB^2 + AC^2$". • A retenir : P ⇒ Q **condition suffisante (à Q)** — **condition nécessaire (à P)** • "Pour que ... il faut que ..." : ⇒ "Pour que ... il suffit que ..." : ⇐
2.2 La contraposée d'une implication • **La contraposée** de $P \Rightarrow Q$ est : non Q ⇒ non P. • Une implication et sa contraposée sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Exemple : la contraposée de : "J'habite Bordeaux ⇒ J'habite en France" est "Je n'habite pas en France ⇒ Je n'habite pas Bordeaux". Ces deux propositions sont vraies.	• La contraposée du théorème de Pythagore est : "Si dans un triangle ABC on a $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A". • Nous verrons plus loin que parfois il sera plus facile de démontrer la contraposée plutôt que l'implication directe.
2.3 La réciproque d'une implication • **La réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. • Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, sa réciproque peut être vraie ou fausse. Exemple : "J'habite Bordeaux ⇒ J'habite en France" est vraie mais sa réciproque "J'habite en France ⇒ J'habite à Bordeaux" est fausse car je peux très bien habiter Strasbourg!	La réciproque du théorème de Pythagore est : "Si dans un triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A". Ici le théorème et sa réciproque sont vrais, mais c'est loin d'être le cas pour tous les théorèmes qui consistent en une implication.

Exercice 6 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant éventuellement par des arguments graphiques.
a) Si $ax^2+bx+c<0$ pour tout x réel, alors $\Delta<0$.
b) Si $\Delta<0$ alors $ax^2+bx+c<0$ pour tout x réel.
c) Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+4x+5$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d'équation $y=4x+5$ est la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0.
d) Si la fonction f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y=4x+5$ alors $f(x)=2x^3+4x+5$.

Exercice 7 Compléter par le symbole d'implication dans le bon sens :
a) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ... $x=\frac{\pi}{6}$.
b) $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ... les points A, M et B sont alignés.
c) $\sin x\geqslant 0$ ... $x\in[0;\pi]$.

Exercice 8 Déterminer la négation de : "$P\Rightarrow Q$".

Exercice 9 Dans un repère du plan, soit (d) la droite d'équation $2x-3y+7=0$.
Énoncer la contraposée de :
"Si $2x_M-3y_M+7=0$ alors le point $M(x_M;y_M)$ appartient à la droite (d)".
Cette contraposée est-elle vraie ?

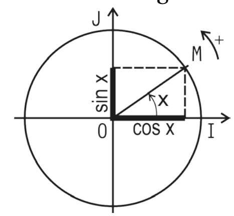
Exercice 10 La proposition P suivante est-elle vraie ?

$$\text{P : "Si } x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ alors } \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{".}$$

Énoncer la réciproque de cette proposition P.
Cette réciproque est-elle vraie ?

FOCUS

Éléments de trigonométrie :
• $(O;I,J)$ repère orthonormé direct.
$\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.



$x\in\mathbb{R}$ et M le point de $\mathscr{C}$ image du réel x.
$\cos x$ est l'abscisse du point M.
$\sin x$ est son ordonnée.

• Angles opposés
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

• Périodicité : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$
$\cos(x+k2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+k2\pi)=\sin x$.
Le sinus et le cosinus sont 2π-périodiques.

• Tableau des valeurs élémentaires :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

COURS	MÉTHODES ET COMMENTAIRES
3.1 Démontrer une équivalence Soient P et Q deux propositions. • La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit "**P équivalente à Q**" ou encore "**P si et seulement si Q**". • Si $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, cela signifie que $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$ sont vraies. Exemple : "ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu" est vraie. • Lorsque P et Q sont équivalentes, **P est une condition nécessaire et suffisante à Q** (et Q est une condition nécessaire et suffisante à P).	• Pour démontrer que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on procède en deux étapes lorsque le résultat n'est pas "trivial" (car le cerveau ne peut pas fonctionner dans deux sens en même temps !). 1) On montre que $P \Rightarrow Q$ est vraie, P condition suffisante à Q. 2) Puis on montre que $Q \Rightarrow P$ est aussi vérifiée, autrement dit P est une condition nécessaire à Q. • En revanche, pour les équations ou inéquations, on pourra directement écrire des équivalences. Exemple : $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ donc $x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$ d'où $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
3.2 Démontrer une implication par sa contraposée On a vu dans la rubrique concernant la contraposée d'une implication que lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, sa contraposée l'est aussi, donc on a toujours le choix de montrer une implication ou bien sa contraposée.	Cette démarche est à suivre quand l'implication directe $P \Rightarrow Q$ est moins facile que de montrer la contraposée. Par exemple, pour prouver que : "Si $x^2 + x < 0$ alors $x < 0$" on montre l'implication bien plus immédiate : "Si $x \geqslant 0$ alors $x^2 + x \geqslant 0$".
3.3 Raisonner par l'absurde Le principe du raisonnement par l'absurde est le suivant : Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on montre que la négation de P conduit à une absurdité. Autrement dit, on cherche à montrer le contraire de la conclusion voulue et on aboutit à une impasse.	Prouvons la véracité de la proposition : "Si A et B sont deux points distincts du plan et C un point n'appartenant pas à la médiatrice de $[AB]$, alors le triangle ABC n'est pas isocèle en C". Si le triangle ABC était isocèle en C, alors C serait équidistant des points A et B i.e sur la médiatrice de $[AB]$, ce qui est absurde.
3.4 Démontrer par disjonction des cas • Lorsque l'on doit démontrer une proposition dans laquelle il y a un quantificateur "Pour tout x...", il est parfois judicieux de faire la démonstration en distinguant les diverses possibilités d'appartenance de x. • Ce type de raisonnement est très fréquent en arithmétique lorsqu'on doit montrer un résultat valable pour tout n entier naturel, on pourra être amenés à distinguer les cas n pair et n impair.	Exemple : on se propose de démontrer "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair". 1er cas : n pair alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $n+1 = 2k+1$ et $n(n+1) = 2k(2k+1)$ $n(n+1)$ est divisible par 2 donc pair. 2d cas : n impair alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $n+1 = 2k+2$ et $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ $n(n+1)$ est divisible par 2 donc pair.

3. Différents types de raisonnements

EXERCICES

Exercice 11 Soit m un nombre réel.
On se place dans un repère orthonormé du plan.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}1+m\\m-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2+m\\m+1\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Exercice 12 Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$ et $A(2;0)$.
a) Déterminer D_f.
b) Montrer qu'un point $M(x;y)$ appartient à la courbe représentative de f si et seulement si $AM^2=9\ et\ y\geqslant 0$.
c) En déduire la nature de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 13 Déterminer la négation de : "$P \iff Q$".

Exercice 14 Démontrer que, si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est lui-même pair.
On pourra pour cela exprimer cette assertion en langage mathématique, puis considérer la contraposée.

Exercice 15 En s'aidant de l'exercice sur le carré d'un entier naturel et en raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Indication : tout rationnel peut s'écrire $\frac{p}{q}$ avec p et q des entiers premiers entre-eux (c'est à dire sans diviseur commun autre que 1).

Exercice 16 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, n^2+2 n'est pas multiple de 4.

Exercice 17 Soient A, B et C trois points distincts du plan.
Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ et préciser la valeur en fonction de AB et AH, où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On distinguera pour cela les cas $\widehat{BAC}$ aigu, droit ou obtus.

FOCUS

• Produit scalaire dans le plan :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathscr{P}$.

1) Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nu}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

avec $(\vec{u},\vec{v})$ l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Critère d'orthogonalité :
Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, on a l'équivalence : $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.

3) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
$\vec{u}.(\vec{v}+k\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+k\vec{u}.\vec{w}$ où k est réel
$(\vec{v}+k\vec{w}).\vec{u}=\vec{v}.\vec{u}+k\vec{w}.\vec{u}$

4) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy' \text{ et } \|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

• Un polynôme du second degré à coefficients réels ax^2+bx+c est toujours du signe de a sauf quand $\Delta>0$ et que x est entre les racines.

COURS

3.5 Démontrer par récurrence simple

Le cadre : On doit démontrer la véracité d'une propriété dépendant d'un entier naturel n pour $n \geqslant n_0$.
On note $\mathscr{A}(n)$ cette proposition.
Pour démontrer que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela se fait en trois étapes :
• Initialisation : on montre que $\mathscr{A}(n_0)$ est vraie.
• Hérédité : on suppose que pour n un entier **fixé** dans $\mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{A}(n)$ qui est vérifiée. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence notée (HR).
On montre alors que $\mathscr{A}(n+1)$ est nécessairement vraie.
• Conclusion : de proche en proche, par récurrence, on a ainsi montré que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$.
Remarque : l'initialisation est à vérifier pour la plus petite valeur de n possible (cela peut être 0, 1, 2...).

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

Exemple : Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathscr{A}(n) : "1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}"$$

Démontrons par récurrence que la propriété $\mathscr{A}(n)$ ci-dessus est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
• Initialisation : Pour $n = 1$
$\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc $\mathscr{A}(1)$ vraie.
• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{A}(n)$ est vraie, c'est à dire :
$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (HR) (c'est **l'hypothèse de récurrence**)
Alors, d'après (HR), on a :
$1+2+\ldots n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
donc $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée. Ainsi $\mathscr{A}(n) \Longrightarrow \mathscr{A}(n+1)$.
• Conclusion : $\mathscr{A}(1)$ est vraie et $\mathscr{A}(n) \Rightarrow \mathscr{A}(n+1)$ donc on a prouvé par récurrence : $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.6 Démontrer par récurrence double

Soit $\mathscr{A}(n)$ une proposition écrite pour un entier naturel $n \geqslant n_0$ vérifiant :
• Initialisation : $\mathscr{A}(n_0)$ et $\mathscr{A}(n_0+1)$ sont vraies.
• Hérédité : Pour un n fixé, $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{A}(n)$ et $\mathscr{A}(n+1)$ vraies implique que $\mathscr{A}(n+2)$ l'est aussi.
• Conclusion : alors par récurrence $\mathscr{A}(n)$ est vérifiée pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque : : il existe aussi une récurrence forte où l'on suppose dans l'hérédité que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout k tel que $n_0 \leqslant k \leqslant n$ et on prouve alors que $\mathscr{A}(n+1)$ l'est aussi.

Exemple : soient a et b deux entiers relatifs et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1}^2 - 5u_n + 2$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
démo : on pose $\mathscr{A}(n) : u_n \in \mathbb{Z}$.
• Initialisation : $u_0 = a \in \mathbb{Z}$ et $u_1 = b \in \mathbb{Z}$ donc $\mathscr{A}(0)$ et $\mathscr{A}(1)$ sont vraies.
• Hérédité : on suppose que $u_n \in \mathbb{Z}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{Z}$, alors : $u_{n+2} = 3u_{n+1}^2 - 5u_n + 2$. Or $u_{n+1}^2 \in \mathbb{Z}$ et $u_n \in \mathbb{Z}$ par (HR) donc $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$ en tant que combinaison linéaire de relatifs.
• Conclusion : $\mathscr{A}(0)$ et $\mathscr{A}(1)$ sont vraies, puis
$\big(\mathscr{A}(n) \text{ et } \mathscr{A}(n+1) \Rightarrow \mathscr{A}(n+2)\big)$ donc par récurrence double, $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.7 Démontrer par analyse-synthèse

Le cadre : On doit démontrer l'existence et éventuellement l'unicité d'une solution à un problème. Cela se fait en deux étapes :
• Analyse : on suppose l'existence d'une solution c'est à dire que l'on analyse ce que cela implique (**condition nécessaire**).
• Synthèse : on montre que la ou les solutions trouvée(s) à l'étape de l'analyse convient au problème (**condition suffisante**).

• Lorsque **l'étape d'analyse** induit une unique possibilité alors cela garantit **l'unicité** de la solution recherchée.
Si cette étape fait émerger plusieurs candidats, la synthèse permettra de déterminer lesquels on "garde" car ils répondent à toutes les contraintes imposées aux solutions.
• **L'étape de synthèse** permet d'obtenir **l'existence** de la solution (ou des solutions si plusieurs conviennent) au problème.

Exercice 18 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 19 Démontrer par récurrence que $2^n \geqslant n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 Inégalité de Bernoulli
Pour x un réel tel que $x > 0$, on considère $\mathscr{A}(n)$: " $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$"
Montrer que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 21 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + nu_n^2}$.
a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
b) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n puis le montrer par récurrence.

Exercice 22 a) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de 2^n et n^2 pour n variant de 4 à 11.
b) Émettre une conjecture sur l'ordre de 2^n et n^2 pour $n \geqslant 4$.
La démontrer par récurrence.

Exercice 23 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

Exercice 24 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exercice 25 Montrer que pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique couple de deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'une paire et l'autre impaire telles que :

$$f = g + h$$

Remarque : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

FOCUS

• Raisonnement par récurrence simple :
A montrer :
1) $\mathscr{A}(n_0)$ est vraie (**initialisation**)
2) $\mathscr{A}(n) \Rightarrow \mathscr{A}(n+1)$ (**hérédité**)
On déduit :
$\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (**conclusion**)

• Raisonnement par récurrence double :
Il faut y penser quand une suite est caractérisée par une relation donnant u_{n+2} en fonction des termes u_{n+1} et u_n)
A montrer :
1) $\mathscr{A}(n_0)$ et $\mathscr{A}(n_0+1)$ sont vraies (**initialisation**)
2) ($\mathscr{A}(n)$ et $\mathscr{A}(n+1)$)$\Rightarrow \mathscr{A}(n+2)$ (**hérédité**)
On déduit :
$\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (**conclusion**)

• Raisonnement par analyse-synthèse :
(y penser quand on nous demande de montrer qu'il existe...tel que...)
On suppose que l'objet cherché existe et on analyse alors à quoi il ressemble forcément. La synthèse n'est que la vérification du fait que le ou les candidats trouvés à l'analyse se conforment à toutes les conditions imposées au départ.

• Une fonction f est dite paire (respectivement impaire) lorsque :
1) Son domaine de définition D_f est centré en 0.
2) $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$ pour impaire).

Exercice 1 • $\boxed{\text{P est fausse}}$ par exemple avec $x = -8$ et $y = 2$, on a $|x - y| = |-10| = 10$ or $x - y = -10$. De façon générale, dès que $x < y$, P sera rendue fausse.

• $\boxed{\text{Q est vraie}}$ car $|x \times y| = |x| \times |y|$ pour tous x et y réels.

• $\boxed{\text{R est vraie}}$ car a étant non nul, le polynôme est du second degré avec $\Delta = b^2 - 4ac$ donc si a et c sont de signes opposés alors $ac \leqslant 0$ d'où $\Delta \geqslant 0$. Le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet une ou deux racines réelles.

• $\boxed{\text{T est fausse}}$ car 2 est le plus petit nombre premier or il est pair. Cependant, à part 2, tous les nombres premiers sont impairs (sinon ils seraient divisibles par 1, 2 et eux-mêmes).

Exercice 2 non Q : "$x \geqslant 2$" non R : "$x < 0$"
non S : "Le triangle ABC n'est pas isocèle en A".

Exercice 3 $\boxed{\text{"P et Q" est fausse}}$ car Q est fausse donc P et Q ne sont pas toutes les deux vraies.
$\boxed{\text{"P ou Q" est vraie}}$ car il suffit que l'une d'entre elles soit vraie ce qui est le cas de P.

Exercice 4 a) $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2 = 2n^2 + 3n - 1$
donc $u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 3n - 1 - (2n^2 - n - 2) = 4n + 1$.
b) $\boxed{\text{P est vraie}}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $4n + 1 > 0$ donc $4n + 1 \neq 0$, i.e $u_{n+1} \neq u_n$.
$\boxed{\text{Q est vraie}}$ car pour $n = 0$, on a $u_{n+1} - u_n = 1$ donc $u_{n+1} = u_n + 1$

Exercice 5 non ($\exists x \in E$ tel que P) $\Longleftrightarrow \forall x \in E$, non P
non ($\forall x \in E$ tel que P) $\Longleftrightarrow \exists x \in E$, non P
non ($\forall x \in A,\ x \leqslant 10$) $\Longleftrightarrow \exists x \in A,\ x > 10$
non ($-1 < x \leqslant 3$) $\Longleftrightarrow x > 3$ ou $x \leqslant -1$

Exercice 6 a) $\boxed{\text{Vraie}}$ car si la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est en dessous de l'axe des abscisses, elle ne l'intercepte pas donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle, ainsi $\Delta < 0$.
b) $\boxed{\text{Fausse}}$ car si $\Delta < 0$, alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ ne coupe pas l'axe des abscisses, elle est donc au-dessus ou en dessous de celui-ci, donc $ax^2 + bx + c > 0$ pour tout x réel ou bien $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout x réel.
c) $\boxed{\text{Vraie}}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 + 4$ donc $f'(0) = 4$ et $f(0) = 5$
donc $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 4x + 5$.
d) $\boxed{\text{Fausse}}$ car par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 5$ convient (sa courbe est sa propre tangente en tout point).

Exercice 7 a) $\boxed{x = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

b) $\boxed{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \text{les points } A, M \text{ et } B \text{ sont alignés}}$

c) $\boxed{x \in [0;\pi] \Longrightarrow \sin x \geqslant 0}$

Exercice 8 $\boxed{\text{non "}P \Rightarrow Q\text{" est "P et non Q"}}$

Exercice 9 La contraposée de "Si $2x_M - 3y_M + 7 = 0$ alors le point $M(x_M; y_M)$ appartient à la droite (d)" est :
$\boxed{\text{"Si } 2x_M - 3y_M + 7 \neq 0\text{, alors le point } M(x_M; y_M) \text{ n'appartient pas à la droite } (d)\text{."}}$
Cette contraposée est vraie car l'implication directe de départ est vraie.

Exercice 10 $\boxed{\text{P est vraie}}$ car $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(\frac{3\pi}{4} + k2\pi) = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ par 2π-périodicité du sinus.
La réciproque de P est :
$\boxed{\text{"Si } \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{, alors } x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\text{"}}$, cette réciproque est fausse.
En effet, pour $x = \frac{\pi}{4}$ par exemple, on a $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pourtant $\frac{\pi}{4}$ n'est pas de la forme $\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Exercice 11 $\vec{u}\begin{pmatrix} 1+m \\ m-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2+m \\ m+1 \end{pmatrix}$ orthogonaux $\Longleftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Longleftrightarrow (1+m)(2+m) + (m-4)(m+1) = 0 \Longleftrightarrow m^2 - 1 = 0$
donc $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 1+m \\ m-4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} 2+m \\ m+1 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux} \Longleftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -1}$

Exercice 12
a) <u>Condition sur x</u> : $-x^2+4x+5 \geqslant 0 \quad \Delta = 36,\ x_1 = 5$ et $x_2 = -1$
Le polynôme $-x^2+4x+5$ est du signe de $a=-1$ donc négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines, d'où $D_f = [-1;5]$.
b) $M(x;y) \in \mathscr{C}_f \iff y = \sqrt{-x^2+4x+5}$ avec $x \in [-1;5]$
or $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x-2)^2 + y^2$
donc $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0 \iff (x-2)^2 + y^2 = 9$ et $y \geqslant 0$
$\iff y^2 = -x^2+4x+5$ et $y \geqslant 0 \iff y = \sqrt{-x^2+4x+5}$ et $-x^2+4x+5 \geqslant 0$
d'après a), $-x^2+4x+5 \geqslant 0 \iff x \in [-1;5]$, donc on a bien :
$\boxed{M(x;y) \in \mathscr{C}_f \text{ si et seulement si } AM^2 = 9\ et\ y \geqslant 0}$
c) $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0 \iff AM = 3$ et $y \geqslant 0$
$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est le demi-cercle de centre } A(2;0) \text{ et de rayon 3 au- dessus de } (Ox)}$

Exercice 13 non($P \Leftrightarrow Q$) est "non ($P \Rightarrow Q$) ou non ($Q \Rightarrow P$), c'est-à-dire $\boxed{\text{(P et non Q) ou (Q et non P)}}$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
Pour cela, on montre la contraposée : n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
Supposons n impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$, ainsi $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 2(2p^2+2p)+1 = 2N+1$ avec $N = 2p^2+2p \in \mathbb{N}$. On obtient bien que n^2 est impair.
On a donc n impair $\Rightarrow n^2$ impair donc $\boxed{n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}}$

Exercice 15 Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Il existe alors p et q deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (on écrit la fraction sous forme irréductible d'où p et q de plus grand diviseur commun égal à 1).
Alors $\sqrt{2}q = p$ et par suite $(\sqrt{2}q)^2 = p^2 \iff 2q^2 = p^2\ (*)$
p^2 est donc pair, et d'après l'exercice 14, on en déduit que p est pair.
Il existe alors k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $p = 2k$. On reprend $(*)$ ce qui donne :
$2q^2 = 4k^2 \iff q^2 = 2k^2$, donc q^2 pair et par suite q pair.
On obtient donc p et q pairs, ce qui est absurde car cela signifierait que 2 est un diviseur commun à p et q (contredit p et q premiers entre eux).
Ainsi $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel}}$

Exercice 16 On distingue les cas n pair et n impair.
<u>Si n pair</u> : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$ donc $n^2+2 = 4k^2+2$. Si n^2 était multiple de 4, alors il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^2+2 = 4k^2+2 = 4N \iff 2 = 4(N-k^2)$
$\iff \underbrace{1}_{\text{impair}} = \underbrace{2(N-k^2)}_{\text{pair}}$, ce qui est absurde
donc n^2+2 n'est pas multiple de 4 dans le cas n pair.
<u>Si n impair</u> : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1$ donc $n^2+2 = 4k^2+4k+3$.
De même que précédemment, n^2+2 n'est pas multiple de 4.
<u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+2 \text{ n'est pas multiple de 4}}$

Exercice 17 On distingue les trois cas $\widehat{BAC}$ aigu, droit ou obtus.
<u>Si $\widehat{BAC}$ aigu</u> : $H \in [AB]$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$, or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc :
$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos 0 = AB \times AH}$
<u>Si $\widehat{BAC}$ droit</u> : $H = A$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et par ailleurs $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{0} = 0$, on a donc :
$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 0}$
<u>Si $\widehat{BAC}$ obtus</u> : $H \notin [AB]$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors on montre de même que dans le premier cas :
$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos \pi = -AB \times AH}$

Exercice 18 Soit $\boxed{\mathscr{A}(n) : "\underbrace{1^2+2^2+...+n^2}_{A} = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{B}"}$

On va montrer par récurrence que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $\mathbb{N}^*$.

• Initialisation : Pour $n=1$, $A=1^2=1$ et $B=\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}=\frac{6}{6}=1$

$A=B$ est donc $\mathscr{A}(1)$ est bien vraie.

• Hérédité : Supposons qu'il existe un n fixé dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{A}(n)$ soit vraie, c'est à dire :

$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (HR) hypothèse de récurrence.

On va alors montrer que $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée, c'est-à -dire :

$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Or, d'après (HR) on a :

$$\underline{1^2+2^2+...+n^2}+(n+1)^2=\underline{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

Et on développe : $(n+2)(2n+3)=2n^2+3n+4n+6=2n^2+7n+6$

On a donc $1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ce qui est exactement $\mathscr{A}(n+1)$.

• Conclusion :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(1)\text{ vraie}\\ \mathscr{A}(n)\Longrightarrow\mathscr{A}(n+1)\end{array}\right\}\text{donc par récurrence } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Exercice 19 Soit $\boxed{\mathscr{A}(n) : "2^n \geqslant n+1"}$

On va montrer par récurrence que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $\mathbb{N}$.

• Initialisation : $2^0=1$ et $0+1=1$, $1\geqslant 1$ donc $\mathscr{A}(0)$ est bien vraie.

• Hérédité : Supposons que pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, $\mathscr{A}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $2^n\geqslant n+1$ (HR) hypothèse de récurrence.

On va alors montrer que $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée, c'est-à -dire : $2^{n+1}\geqslant n+2$

Or, d'après (HR) on a : $2^n\geqslant n+1$ donc $2^n(\times 2)\geqslant (n+1)(\times 2)$

Ce qui donne $2^{n+1}\geqslant 2n+2$

mais $n\geqslant 0$ donc $2n\geqslant n$ puis $2n+2\geqslant n+2$. Ainsi $2^{n+1}\geqslant 2n+2\geqslant n+2$ et par transitivité $2^{n+1}\geqslant n+2$, ce qui est exactement $\mathscr{A}(n+1)$.

• Conclusion :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(0)\text{ vraie}\\ \mathscr{A}(n)\Longrightarrow\mathscr{A}(n+1)\end{array}\right\}\text{donc par récurrence } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Exercice 20 Soit $\boxed{\text{pour } x\in\mathbb{R}^{+*}, \mathscr{A}(n) : "(1+x)^n\geqslant 1+nx"}$

On va montrer par récurrence que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• Initialisation : $(1+x)^0=1$ et $1+0\times x=1$ on a $1\geqslant 1$ donc $\mathscr{A}(0)$ vraie.

• Hérédité : Supposons que pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, $\mathscr{A}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ (HR) hypothèse de récurrence.

On va alors montrer que $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée, i.e : $(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x$

On remarque que $(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n$

Or d'après (HR) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$. Par ailleurs, $x>0$ donc $1+x>1>0$

Donc $(1+x)^n\times(1+x)\geqslant(1+nx)\times(1+x)$, i.e $(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x+nx^2$

De plus $nx^2\geqslant 0$ donc $1+(n+1)x+nx^2\geqslant 1+(n+1)x$

Ainsi, par transitivité : $(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x$, ce qui est $\mathscr{A}(n+1)$.

• Conclusion :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(0)\text{ vraie}\\ \mathscr{A}(n)\Longrightarrow\mathscr{A}(n+1)\end{array}\right\}\text{donc par récurrence } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Exercice 21 a) $u_1=\frac{u_0}{1+0\times u_0^2}=u_0=\boxed{1}\quad u_2=\frac{u_1}{1+1u_1^2}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$u_3=\frac{u_2}{1+2u_2^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$

b) Au vu des premiers termes, on conjecture que $u_n=\frac{1}{n}$ (ce n'est qu'une hypothèse, rien n'est démontré !)

Soit $\boxed{\mathscr{A}(n) : "u_n=\frac{1}{n}"}$

On va montrer par récurrence que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $\mathbb{N}^*$.

• Initialisation : $u_1=1$ et $\frac{1}{1}=1$ donc $\mathscr{A}(1)$ vraie.

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un n fixé dans $\mathbb{N}^*$, $\mathscr{A}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $u_n = \frac{1}{n}$ (HR) hypothèse de récurrence.

On va alors montrer que $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée, i.e : $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Par définition $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2}$ et par (HR), $u_n = \frac{1}{n}$

d'où $u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+n\times\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, ce qui est $\mathscr{A}(n+1)$.

• <u>Conclusion</u> :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(1) \text{ vraie}\\ \mathscr{A}(n) \Longrightarrow \mathscr{A}(n+1)\end{array}\right\} \text{donc par récurrence } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 22

a)

n	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	16	32	64	128	256	512	1024	2048
n^2	16	25	36	49	64	81	100	121

b) On conjecture au vu du tableau que : $2^n \geqslant n^2$ pour $n \geqslant 4$

Posons $\boxed{\mathscr{A}(n) : \text{"}2^n \geqslant n^2\text{"}}$

On va prouver par récurrence que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

• <u>Initialisation</u> : Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, $2^4 = 4^2$ on a bien $2^4 \geqslant 4^2$ donc $\mathscr{A}(4)$ est vraie.

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ on ait $\mathscr{A}(n)$ vraie, c'est-à-dire : $2^n \geqslant n^2$ (HR)

On veut alors montrer que $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée, i.e : $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

Or $2^{n+1} = 2\times 2^n$ et par (HR) $2^n \geqslant n^2$ donc $2\times 2^n \geqslant 2n^2$ donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$

$2n^2$ n'est pas le terme que l'on voudrait à droite de l'inégalité mais on va prouver que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ auquel cas, on aura $2^{n+1} \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$ d'où par transitivité $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$ ce qui est $\mathscr{A}(n+1)$.

Tout consiste donc à établir que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

On effectue la différence $2n^2-(n+1)^2 = 2n^2-(n^2+2n+1) = n^2-2n-1$.

On veut que $n^2-2n-1 \geqslant 0$ pour $n \geqslant 4$.

Posons $P(x) = x^2-2x-1$, $\Delta = (-2)^2-4\times(-1) = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$

$P(x)$ du signe de $a = 1$, c'est-à-dire positif pour $x > 1+\sqrt{2}$ et $x < 1-\sqrt{2}$.

Or $1+\sqrt{2} \simeq 2,4$, ainsi pour $n \geqslant 4 > 1+\sqrt{2}$ on a $n^2-2n-1 > 0$

donc $2n^2-(n+1)^2 > 0$, c'est-à-dire $2n^2 > (n+1)^2$, ce qui est $\mathscr{A}(n+1)$.

<u>Conclusion</u> :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(4) \text{ vraie}\\ \mathscr{A}(n) \Longrightarrow \mathscr{A}(n+1)\end{array}\right\} \text{donc par récurrence } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$$

Remarque : Pour comparer deux quantités (ici $2n^2$ et $(n+1)^2$), il suffit de les soustraire et d'étudier le signe de la différence, ce qui est plus facile à faire, pensez-y!

Exercice 23 Soit $\mathscr{A}(n)$: "$u_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$"

On va montrer par récurrence double que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $\mathbb{N}$.

• <u>Initialisation</u> : $u_0 = 1$ et $\left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1$, on a bien $1 \leqslant 1$, donc $\mathscr{A}(0)$ vraie.

$u_1 = 1$ et $\left(\frac{7}{4}\right)^1 = \frac{7}{4}$, on a bien $1 \leqslant \frac{7}{4}$, donc $\mathscr{A}(1)$ vraie.

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, $\mathscr{A}(n)$ et $\mathscr{A}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire : $u_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$ et $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$ (HR)

On va alors montrer que $\mathscr{A}(n+2)$ est vérifiée, i.e : $u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$

Or $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$, donc d'après (HR) $u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$

On voudrait montrer que $\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$

Or $\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2} \iff \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2} - \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{7}{4}\right)^n \geqslant 0$

$\iff \left(\frac{7}{4}\right)^n\left[\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{7}{4} - 1\right] \geqslant 0 \iff \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{5}{16} \geqslant 0$, ce qui est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

On en déduit que $u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$

Ainsi, par transitivité : $u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$, ce qui est $\mathscr{A}(n+2)$.

• <u>Conclusion</u> :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(0) \text{ et } \mathscr{A}(1) \text{ vraies}\\ \mathscr{A}(n) \text{ et } \mathscr{A}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{A}(n+2)\end{array}\right\} \text{donc } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 24 Soit $\boxed{\mathscr{A}(n) : "u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n"}$

On va montrer par récurrence double que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $\mathbb{N}$.

• <u>Initialisation</u> : $u_0 = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 = 0$, donc $\mathscr{A}(0)$ vraie.

$u_1 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = 1$, donc $\mathscr{A}(1)$ vraie.

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un n dans $\mathbb{N}$, $\mathscr{A}(n)$ et $\mathscr{A}(n+1)$ vraies :

$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$

On va alors montrer $\mathscr{A}(n+2)$: $u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}$

Or $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, donc d'après (HR) :

$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$

$\iff u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \times [1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \times [1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$

$\iff u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \times [\frac{3+\sqrt{5}}{2}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \times [\frac{3-\sqrt{5}}{2}]$

Or $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

donc $u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}$, ce qui est $\mathscr{A}(n+2)$.

• <u>Conclusion</u> :

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{A}(0) \text{ et } \mathscr{A}(1) \text{ vraies}\\ \mathscr{A}(n) \text{ et } \mathscr{A}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{A}(n+2)\end{array}\right\} \text{donc } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 25 $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le résultat à montrer est alors :

$$\boxed{\forall f \in E \quad \exists! (g,h) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I} \quad \text{tel que} \quad f = g + h}$$

On va raisonner par analyse-synthèse.

Soit donc $f \in E$.

On veut montrer l'existence de $\left\{\begin{array}{l} g \in \mathscr{P}\\ h \in \mathscr{I}\end{array}\right.$ telles que $f = g + h$.

Pour trouver ces deux fonctions g et h on fait une recherche de conditions nécessaires, c'est l'analyse :

• <u>Analyse</u> : Soient g et h vérifiant $\left\{\begin{array}{l} g \in \mathscr{P}\\ h \in \mathscr{I}\\ f = g + h\end{array}\right.$.

Nous allons voir ce que cela implique sur g et h.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad (1)$$

Ainsi, on en déduit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = g(-x) + h(-x)$ et comme g est paire et h impaire, il en résulte :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = g(x) - h(x) \quad (2)$$

La somme des deux relations (1) et (2) donne alors : $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$

et la différence des deux relations (1) et (2) donne : $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Ce qui définit complètement de manière unique les fonctions g et h.

Donc si g et h répondent au problème, elles ne peuvent être que les deux fonctions définies ci-dessus.

C'est la fin de l'analyse, on a trouvé des conditions nécessaires uniques sur g et h , ce qui démontre par là-même l'unicité.

• <u>Synthèse</u> : Vérifions alors que ces conditions nécessaires sont suffisantes, c'est-à-dire que les deux fonctions g et h définies comme ci-dessus répondent bien au problème, c'est la synthèse.

— La fonction g est bien paire, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$$

— La fonction h est bien impaire, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$$

— On a bien $f = g + h$ puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

• <u>Conclusion</u> : g et h ainsi établies répondent bien au problème et sont définies de manière unique, donc on a bien le résultat.

COURS | MÉTHODES ET COMMENTAIRES

1. Vocabulaire des ensembles

1.1 Appartenance et inclusion

• **Un ensemble** E est une famille d'**éléments**.
x **appartient** à un ensemble E si et seulement si x est un élément de E et on note $x \in E$, sinon, $x \notin E$.
$\emptyset$ est l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
Le cardinal de E, noté $card(E)$, est son nombre d'éléments quand il est fini.
• On dit que A est **un sous-ensemble** de E ou que A est **inclus dans** E, noté $A \subset E$, si et seulement si $\forall x \in A,\ x \in E$. On dit aussi que E **contient** A.
Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
• Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$. L'intervalle d'entiers $[\![a;b]\!]$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$: $[\![a;b]\!] = \{a; a+1; ...; b-1; b\}$.
Par extension $[\![a;+\infty[\![= \{a; a+1; a+2; ...\}$.
• $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. On a $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

• On note plus particulièrement :
$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;...\}$
$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 0\}$
donc $\mathbb{R}^{*+} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$
• Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.
• Pour montrer que $A \subset E$, on prend $a \in A$ et on prouve que nécessairement $a \in E$.
Pour établir l'égalité de deux ensembles, on montre la double inclusion c'est-à-dire que :
$A = E \Leftrightarrow (A \subset E$ et $E \subset A)$.
• Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont les parties de E.
Exemple : Si $E = \{1;2;3\}$
alors $\mathscr{P}(E)$ vaut $\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}\}$.

1.2 Opérations sur les ensembles

• Intersection : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B. Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits **disjoints**.
• Union : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B. On a : $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A \cup B$.
• Différence : $A \backslash B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.
• Complémentaire : le complémentaire de A dans E noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A, i.e $\overline{A} = E \backslash A$.
• Règles sur les opérateurs :
1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *associativité*
2) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ *commutativité*
3) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$, $A \cap E = A$.
4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *distributivité*
5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *lois de Morgan*
• Produit cartésien : Soient E et F deux ensembles, on note ExF leur produit cartésien défini par $E \times F = \{(x,y) / x \in E\ et\ y \in F\}$
Si $E = F$, on note E^2 au lieu de ExE.

• Deux ensembles disjoints n'ont alors pas d'élément en commun.
• La réunion $\cup$ de deux ensembles correspond au "ou" en langage courant. En revanche, ce "ou" est dit inclusif car il signifie l'un, l'autre ou les deux.
• L'intersection $\cap$ correspond au "et", c'est-à-dire les deux à la fois.
• Il découle de la définition du complémentaire que $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$. De plus $\overline{\overline{A}} = A$.
• On généralise l'union et l'intersection à plus de deux ensembles :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et $x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!],\ x \in A_k$
$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \iff \exists k \in [\![1;n]\!],\ x \in A_k$
• On peut généraliser le produit cartésien : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2 ..., x_n) / \forall k \in [\![1;n]\!]\ x_k \in A_k\}$
Exemples usuels :
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) / x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$
et $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 ..., x_n) / \forall k \in [\![1;n]\!]\ x_k \in \mathbb{R}\}$.
• On a $(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

EXERCICES

Exercice 1 Soit A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels pairs.
a) Montrer que $A \subset B$. b) A-t-on $A = B$?

Exercice 2 On note E l'ensemble des points de coordonnées (x, y) du plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\mathscr{D}_1 = \{(x, y) \in E / 3x+2y = 0\}$ et $\mathscr{D}_2 = \{(x, y) \in E / \exists t \in \mathbb{R}$ avec $x = 2t-4,\ y = -3t+6\}$.
Montrer que $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$.

Exercice 3 Soit a, b, c, d réels et $E = \{a; b; c; d\}$.
Déterminer les éléments de $\mathscr{P}(E)$ qui ont un cardinal impair.

Exercice 4 Formules de Morgan généralisées :
Soit une suite d'ensembles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

b) En déduire, sans récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Remarque : pour $n = 2$, ce sont les lois de Morgan du cours (donc admises).

Exercice 5 On considère deux ensembles A et B tels qu'il existe un troisième ensemble X vérifiant :

$$A \cap X = B \cap X \text{ et } A \cup X = B \cup X$$

Montrer que $A = B$.

FOCUS

• Pour montrer l'inclusion $A \subset B$ de l'ensemble A dans l'ensemble B, on prend un élément x de A et on montre que nécessairement $x \in B$.

• Lorsque des ensembles sont définis par des équations (exercice 2), pour prouver l'égalité entre les deux ensembles, on peut directement raisonner par équivalence.

• Penser qu'un élément de $\mathscr{P}(E)$ est une partie de E donc un ensemble.

• Les lois de Morgan disent que, par le complémentaire, une intersection est "transformée" en union des complémentaires et réciproquement.

2. Langage des applications

COURS

2.1 Vocabulaire et notations

E et F deux ensembles.

• f est **une application** de E dans F si et seulement si, à tout élément x de E est associé un unique élément $f(x) \in F$ appelé **image de x par f**. E est **l'ensemble de départ**, F est **l'ensemble d'arrivée**.

L'application f se note $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$

x est **un antécédent** de $y = f(x)$ et $\{(x, f(x)) / x \in E\}$: **graphe de f**.

• $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E est l'ensemble des applications de E dans F.

• **L'application nulle** est celle qui à tout élément x de E associe 0.

• **L'application identité de E** est telle que $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$.

• Restriction d'une application : Soit $f : E \to F$ une application.
Si E' est une partie de E, on appelle **restriction** de f à E', l'application notée $f_{/E'}$ définie par : $\forall x \in E',\ f_{/E'}(x) = f(x)$.

• Composition des applications : Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors $g \circ f$, se lit "g rond f", c'est l'application de E dans G telle que : $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x))$.

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• Une fonction est une application avec $E = \mathscr{D}_f$ (domaine des x pour lesquels on peut calculer $f(x)$) et $F = \mathbb{R}$.
Exemple : Posons $f(x) = \ln(1+x)$. $\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 + x > 0\} =]-1; +\infty[$.

• Deux applications f et g sont égales si et seulement si, elles ont même ensemble de départ et d'arrivée E et F, et que $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

• La restriction d'une application f est la même application mais regardée avec un ensemble de départ plus "restreint" $E' \subset E$.
Exemple : Soit $f(x) = \ln(x^2)$. Alors $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ et $f_{/\{-1;1\}}$ est l'application nulle.

• Attention à l'ordre dans une composition d'applications car dans la plupart des cas $f \circ g \neq g \circ f$. D'autant plus que parfois on pourra construire $f \circ g$ mais pas $g \circ f$ à cause des ensembles de départ et d'arrivée.

• Soit A une partie de E et $f : E \to E$ définie par :
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ f est la **fonction indicatrice de A** notée 1_A

COURS

2.2 Applications particulières

$f : E \to F$ une application.

• f est dite **injective** $\iff \big(\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$
$\iff \big(\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$ *contraposée*

• f est **surjective** $\iff \forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

• f est **bijective** $\iff \forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Lorsque f est bijective, on peut définir **la bijection réciproque** :

$f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}$

On a alors $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.

• Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications :
1) f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective, idem avec surjective(s).
2) Si f et g bijectives alors $g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

• Si φ et ψ sont deux applications telles que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$, alors φ bijective et $\varphi^{-1} = \psi$.

• Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$:
$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$ **l'image directe de A par f**.
$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$ **l'image réciproque de B par f**.

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• Si $f : E \to F$ est **injective**, un élément de F ne peut pas avoir plus d'un antécédent dans E (**aucun ou un antécédent**).
Alors que pour $f : E \to F$ **surjective**, tout élément de F admet au moins un antécédent dans E (**un ou plusieurs antécédents**).
Lorsque f est **bijective**, tout élément de F admet **un unique antécédent** dans E par f.

• Être bijective est une propriété forte car l'application doit être à la fois injective et surjective. Il suffit donc qu'elle ne soit pas injective ou pas surjective pour ne pas être bijective.
Exemple : Soit $f(x) = x^2$.
f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$. Mais f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ (non surjective car les négatifs n'ont pas d'antécédent).

• Nous verrons après le théorème de la bijection pour montrer la bijectivité des fonctions réelles.

• Si $f(x) = \cos x$ alors $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
Si $f(x) = x^2$ et $A = [-1, 3]$ alors $f(A) = [0, 9]$.

• Si $f \circ f = \text{id}$, on dit que f est **une involution**.

Exercice 6 Soient f et g définies par

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ et } g(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

a) Justifier que f et g sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f et g sont égales.

Exercice 7 Soit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 9}$$

Déterminer D_f.

Exercice 8 Soient f et g deux applications définies pour tout réel x par :
a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$.
Déterminer $f \circ g$ puis $g \circ f$. A-t-on égalité ?
b) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $g(x) = -x$.
Déterminer $f \circ g$ puis simplifier : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - (f \circ g)(x)$ (utiliser l'exercice 6).
Que dire de l'application $f - f \circ g$?

Exercice 9 Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définie pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(a, b) = (a + b, a - b)$$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

Exercice 10 Soit f définie par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},\ x \neq -1$$

Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

FOCUS

• Le domaine de définition d'une fonction f noté D_f est l'ensemble des réels pour lesquels $f(x)$ existe. En particulier :
1) $\frac{1}{u(x)}$ est défini pour les x tels que $u(x) \neq 0$.
2) $\sqrt{u(x)}$ est défini pour les x tels que $u(x) \geqslant 0$.
3) $\ln\big(u(x)\big)$ est défini pour x tel que $u(x) > 0$.

• Pour que deux applications ne soient pas égales, il suffit qu'elles n'aient pas la même image pour un x de leur ensemble de définition commun.

Exercice 1 a) Montrons $A \subset B$.
Soit $x \in A$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$, $x = 6k$, donc $x = 2 \times 3k = 2N$ avec $N \in \mathbb{N}$.
Ainsi, x est multiple de 2 donc pair, $x \in B$ et par suite $\boxed{A \subset B}$
b) $B \not\subset A$ car 2 par exemple est dans B mais pas dans A donc $\boxed{A \neq B}$

Exercice 2 Ici on peut raisonner directement par équivalences car il s'agit de vérifier des équations.
$(x, y) \in \mathscr{D}_2 \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 2t - 4$ et $y = -3t + 6$
$\iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $t = \frac{x+4}{2}$ et $t = \frac{6-y}{3}$
$\iff \frac{x+4}{2} = \frac{6-y}{3} \iff 3x + 2y = 0 \iff (x, y) \in \mathscr{D}_1$, donc $\boxed{\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2}$

Exercice 3 Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ ayant un cardinal impair sont les parties de E à 1 ou 3 éléments.
Parties de E à 1 élément : $\boxed{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}}$
Parties de E à 3 éléments : $\boxed{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}}$

Exercice 4 a) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathscr{A}(n) : \text{"} \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k} \text{"}}$

• <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $\overline{\bigcap_{k=1}^{1} A_k} = \overline{A_1}$ et $\bigcup_{k=1}^{1} \overline{A_k} = \overline{A_1}$ donc $\mathscr{A}(1)$ vraie.

• <u>Hérédité</u> : Supposons que pour un n fixé dans $\mathbb{N}^*$, $\mathscr{A}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ (HR) .

On va alors montrer que $\mathscr{A}(n+1)$ est vérifiée, i.e : $\overline{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A_k}$?

Or $\overline{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k} = \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k \bigcap A_{n+1}}$ et en appliquant les lois de Morgan pour deux ensembles avec $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et $B = A_{n+1}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ donc :

$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k \bigcap A_{n+1}} = \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} \bigcup \overline{A_{n+1}} \underset{(HR)}{=} \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k} \bigcup \overline{A_{n+1}} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A_k}$
donc $\mathscr{A}(n+1)$ est vraie.

• <u>Conclusion</u> :

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{A}(1) \text{ vraie} \\ \mathscr{A}(n) \Longrightarrow \mathscr{A}(n+1) \end{array}\right\} \text{donc } \mathscr{A}(n) \text{ vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

b) D'après a) appliqué aux $\overline{A_k}$: $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\overline{A_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.
On prend alors les complémentaires des deux côtés de l'égalité :
$\overline{\overline{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}}} = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}}$

Exercice 5 • Montrons $A \subset B$.
Soit $x \in A$, on doit aboutir à $x \in B$. Faisons une disjonction de cas selon si x est dans X ou non :
<u>1er cas : $x \in X$</u> alors $x \in A \cap X$, or $A \cap X = B \cap X$ donc $x \in B$.
<u>2nd cas : $x \notin X$</u> alors on a tout de même $x \in A \cup X$ puisque $x \in A$, or $A \cup X = B \cup X$ donc $x \in B \cup X$ avec $x \notin X$, d'où $x \in B$.
On conclut que dans les deux cas $x \in A \Longrightarrow x \in B$ donc $\boxed{A \subset B}$
• Montrons $B \subset A$.
Les rôles de A et B étant symétriques, cette inclusion est vérifiée de même que la précédente.
• Ainsi $\boxed{A = B}$

Exercice 6 a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
donc $1 + e^x > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$ donc $D_f = D_g = \mathbb{R}$, f et g sont bien des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) f et g ont le même domaine de définition donc pour qu'elles soient égales, on doit prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1))$ car $e^a \times e^b = e^{a+b}$ et $e^0 = 1$
donc $f(x) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1)$ car $\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
d'où $f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1) = g(x)$.
On conclut que $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont égales}}$

Exercice 7 Conditions : (1) $x-1 \geqslant 0$ (à cause de la racine) $\iff x \geqslant 1$
(2) $x^2-6x+9 \neq 0$ (à cause du dénominateur)
Pour résoudre (2), on écrit $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x=3$
donc (2) $\iff x \neq 3$
On conclut que $\boxed{D_f = [1;3[\cup]3;+\infty[}$

Exercice 8 a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ et $g(x)=x+1$.
f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ car ce sont des polynômes.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$
et $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$
$\boxed{f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ ne sont pas égales}}$ car par exemple $f \circ g(1) = 4$ mais $g \circ f(1) = 2$.
b) $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ et $g(x) = -x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^x > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et g l'est aussi en tant que polynôme (ou fonction linéaire).
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$
donc $f(x) - f \circ g(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$, or d'après l'exercice 6 : $\ln(1+\mathrm{e}^x) = x + \ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$, d'où $f(x) - f \circ g(x) = x$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f - f \circ g)(x) = x$ donc $\boxed{f - f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \text{ l'application identité}}$

Exercice 9 on veut montrer que $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\exists ! (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a,b) = (\alpha,\beta)$
Or, $(\alpha,\beta) = f(a,b) \iff (\alpha,\beta) = (a+b, a-b) \iff a+b=\alpha$ et $a-b=\beta$
on obtient : $(\alpha,\beta) = f(a,b) \iff a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $b = \frac{\alpha-\beta}{2}$.
On a bien trouvé pour tout élément (α,β) dans l'ensemble d'arrivée, un unique antécédent (a,b) dans l'ensemble de départ.
Donc $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} : (\alpha,\beta) \mapsto (\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2})}$

Exercice 10 $\forall x \neq -1$, $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\frac{1-x}{1+x}) = \frac{1-(\frac{1-x}{1+x})}{1+(\frac{1-x}{1+x})}$.
En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(1+x)$, on obtient :
$f \circ f(x) = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)} = \frac{2x}{2} = x$.
Donc $\forall x \neq -1$, $f \circ f(x) = x$, on en déduit que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$.
En conclusion, $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R}\setminus\{-1\} \text{ dans } \mathbb{R}\setminus\{-1\} \text{ et } f^{-1} = f}$

1. Opérations dans $\mathbb{R}$

COURS

1.1 Définitions et propriétés

• $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations dites **internes**, l'addition + et la multiplication ×.

Pour tous x, y et z réels, on a les règles suivantes :

- L'addition :

1) $(x+y) \in \mathbb{R}$ *loi interne*

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ *associativité*

3) $x+y = y+x$ *commutativité*

4) $x+0 = 0+x = x$ *0 élément neutre*

5) x possède un unique **opposé**, noté $-x$, tel que $x+(-x)=0$.

- La multiplication :

1) $(x \times y) \in \mathbb{R}$ *loi interne*

2) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ *associativité*

3) $x \times y = y \times x$ *commutativité*

4) $x \times 1 = 1 \times x = x$ *1 élément neutre*

5) Si $x \neq 0$ alors x possède un unique **inverse** , noté $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}, tel que $x \times \frac{1}{x} = 1$.

6) $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ *distributivité de × par rapport à +*

• Inégalités dans $\mathbb{R}$:

On définit la relation "$\leqslant$" sur $\mathbb{R}$ par :

pour tous x et y réels, $x \leqslant y \iff x - y \leqslant 0$.

Pour $z \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :

1) $x \leqslant x$ *réflexivité*

2) ($x \leqslant y$ et $y \leqslant x$) $\iff x = y$ *anti symétrie*

3) ($x \leqslant y$ et $y \leqslant z$) $\Rightarrow x \leqslant z$ *transitivité*

4) $x \leqslant y \iff x+z \leqslant y+z$ *l'inégalité $\leqslant$ est compatible avec +*

5) ($a \geqslant b$ et $x \geqslant 0$) $\Rightarrow ax \geqslant bx$ *l'inégalité $\leqslant$ est compatible avec × pour les positifs*

6) On généralise la propriété 4) par :

Si $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $a_i \leqslant b_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

c'est-à-dire : $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

Cela permet de majorer/minorer des sommes en majorant/minorant chaque terme sommé.

MÉTHODES ET COMMENTAIRES

• Une loi $*$ est dite **interne** sur un ensemble A si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2$, $x * y \in A$.

C'est-à-dire qu'en mettant en oeuvre la loi sur deux éléments de A, le résultat donne un élément de A.

• $\mathbb{R}$ muni de l'addition, noté $(\mathbb{R},+)$ est appelé **un groupe commutatif** car l'addition vérifie les propriétés de 1) à 5).

De plus $(\mathbb{R},+,\times)$ est **un corps commutatif** car + et × vérifient toutes les propriétés de gauche

• La soustraction et la division se définissent naturellement sur $\mathbb{R}$ par : pour tous x et y réels, $x - y = x + (-y)$

et si $y \neq 0$, $\frac{x}{y} = x \times y^{-1}$

• Pour la relation "$\leqslant$" les propriétés 1), 2) et 3) en font ce que l'on nomme **une relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$. On dit d'ailleurs que $\mathbb{R}$ est **totalement ordonné** car on peut toujours comparer deux éléments quelconques.

• On peut additionner des inégalités lorsqu'elles sont dans le même sens.

Exemple : $x \leqslant 1$ et $y \leqslant -3 \Rightarrow x + y \leqslant -2$.

• La propriété 5) de $\leqslant$, dit que l'on peut multiplier entre-elles des inégalités dans le même sens sur des nombres positifs.

Exemple : $x \geqslant 3$ et $\frac{1}{x+1} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x+1} \geqslant \frac{3}{2}$.

Attention cependant :

1) On ne divise jamais des inégalités entre elles.

2) Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens.

• Pour comparer deux quantités, on peut faire leur différence et étudier son signe.

Dans le cas d'expressions positives, les comparer est équivalent à comparer leurs carrés.