Oraux
corrigés et commentés

Concours PC, PSi, PT et BCPST

Maths

Polytechnique ENS

ellipses

Ivan Bettannier
Adrien Schneider

Chapitre 1

Polynômes, complexes, ...

Chapitre 1 (Polynômes, complexes, ...)

Énoncés

1.1 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

1.2 – ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^k$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$.

1.3 – Polytechnique

Calculer

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1.4 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α, le polynôme $P' + \alpha P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

1.5 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Déterminer le signe de $P(x)P''(x) - P'^2(x)$ pour x réel.

1.6 – ENS

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note $\lambda_1, \dots \lambda_m$ ses racines complexes distinctes.

   Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P, c'est-à-dire que si z est une racine de P', il existe des réels $t_1, \dots, t_m$ positifs avec $t_1 + \cdots + t_m = 1$ tels que

   $$z = \sum_{k=1}^{m} t_k \lambda_k$$

2. Soit P un polynôme de degré ≤ 4 tel que pour tout $i \in \{1, \dots, 3\}$, P et $P^{(i)}$ ont une racine commune. Montrer que P a une unique racine.

1.7 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme unitaire. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $Q_a = P(X+a)$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \geq r$, tous les coefficients de Q_a soient positifs.

1.8 – X/ENS

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

2. Déterminer le nombre de dérangements d_n de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations sans point fixe.

1.9 – X/ENS

On pose $S = \{1, \ldots, 2000\}$. Déterminer le nombre de sous ensembles de S dont la somme des éléments est divisible par 5.

1.10 – ENS

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

1. $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$
2. $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
3. $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

1.11 – Polytechnique

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X) - Q(X-1)$ et $Q(0) = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P = X^n$. Il existe alors un unique polynôme Q_n tel que $X^n = Q_n(X) - Q_n(X-1)$ et $Q_n(0) = 0$. Montrer que $Q'_n(X) = Q'_n(0) + n * Q_{n-1}(X)$.

Chapitre 1 (Polynômes, complexes, ...)

Corrigés

1.1 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

Indications. Utiliser le théorème de Rolle.

Correction. Cet exercice tourne autour d'une idée très classique qui doit avoir été vue au moins une fois.

Notons n le degrés de P, et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ ses racines, de multiplicités respectives $m_1, \dots m_r$. Comme P est scindé, on a $m_1 + \cdots + m_r = n$. De plus, toute racine de P de multiplicité $m > 1$ est racine de P' de multiplicité $m - 1$.

Soit maintenant $i \in \{1, \dots, r-1\}$. On a $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$, et P est continu sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe β_i in $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(\beta_i) = 0$.

Pour conclure, il suffit de savoir compter. Avec les racines multiples de P, on a trouvé des racines de P' dont la multiplicité somme à $\sum_{i=1}^{r}(m_i - 1)$ (les termes valent 0 quand $m_i = 1$). Avec Rolle, on a trouvé $r - 1$ autres racines. Or

$$\sum_{i=1}^{r}(m_i - 1) + (r - 1) = n - r + r - 1 = n - 1 = deg(P')$$

On a donc trouvé toutes les racines de P', et les racines β_1 sont de multiplicité

1. Donc les racines multiples de P' sont bien toutes racines de P. Au passage, nous avons montré que P' est scindé.

L'idée à retenir

Le fait que P scindé implique P' scindé doit être su et pouvoir être démontré sans aucune hésitation.

1.2 – ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^k$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$.

Indications. Considérer la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}Q(x)$.

Correction. On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \sum_{k=0}^{n} P^{k+1}(x) - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} P^k(x) \\ &= e^{-x}(P^{n+1}(x) - P(x)) \\ &= -e^{-x}P(x) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc f est décroissante. Or par croissance comparée, f tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc que $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'idée à retenir

L'idée de multiplier par une exponentielle peut sembler surprenante, mais c'est en réalité une technique très utile dès lors qu'un exercice fait apparaitre une somme d'une fonction et de ses dérivées. On citera comme application classique de cette méthode l'exercice suivant :

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

1.3 – Polytechnique

Calculer

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Indications. Utiliser la formule d'Euler, et considérer le le polynôme

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Correction. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on écrit

$$\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})}{2i}$$

En factorisant pas $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ il vient

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left[e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(1 - e^{-2i\frac{k\pi}{n}}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-2i\frac{k\pi}{n}}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-2i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

Considérons le polynôme

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

On remarque que les $e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ sont les racines n-iemes de l'unité auxquelles il manque 1. On a donc

$$(X-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right) = X^n - 1$$

$$\text{Donc} \quad P = \frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + \cdots + X^{n-1}$$

On en déduit immédiatement que $P(1) = n$

$$\text{D'où} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} P(1) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

L'idée à retenir

Un exercice très classique à connaitre.

1.4 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α, le polynôme $P' + \alpha P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Indications. Faire un mélange des enseignements tirés des deux exercices précédents.

Correction. Notons n le degrés de P, et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ ses racines, de multiplicités respectives $m_1, \ldots m_r$. Le cas $\alpha = 0$ ayant déjà était vu, on suppose $\alpha \neq 0$.

Déjà, les racines de P de multiplicité $m > 1$ sont racines de $P' + \alpha P$ de multiplicité au moins $(m-1)$. Pour trouver d'autres racines, on a envie d'appliquer à nouveau le théorème de Rolle. En s'inspirant de l'exercice précédent, on pose f telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x} P(x)$$

. On a alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{\alpha x}(P' + \alpha P)$$

.

Soit maintenant $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. On a $f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1}) = 0$, et f est continu sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe β_i in $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f'(\beta_i) = 0$.

Comme l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a donc que β_i est racine $P' + \alpha P$. Au total, on a trouvé $(n-1)$ racines à $P' + \alpha P$ (en comptant les multiplicités).

Mais attention, $P' + \alpha P$ est de degré n. Mince, il en manque une ? En fait tout va bien, car $P' + \alpha P$ s'écrit alors sous la forme

$$P' + \alpha P = \prod_{i=1}^{n-1} (X - \gamma_i) Q$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ qui est alors de degré 1, et donc de la forme $\lambda(X - \gamma)$.

$P' + \alpha P$ est donc bien scindé, ouf.

L'idée à retenir

Un exercice qui récompense grandement les connaissances hors programme du candidat. Il est aisé d'imaginer l'avantage indéniable qu'a celui qui sait que "P scindé implique P' scindé" et qui est capable de le démontrer en quelques minutes (voir quelque secondes s'il est est suffisamment convainquant ...). Cela illustre bien que plus on a vu (et assimilé !) d'exercices durant les deux années de classes préparatoires, mieux on est armé pour affronter les concours.

1.5 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Déterminer le signe de $P(x)P''(x) - P'^2(x)$ pour x réel.

Indications. A quelle formule bien connue cette expression fait-elle penser ?

Correction. Remarquons que $P(X)P''(X) - P'^2(X)$ est le numérateur de $P'P$. Or P est scindé, donc il peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=0}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

D'où

$$\frac{P'}{P} = \frac{\lambda \sum_{i=0}^{r} m_i (X - m_i)^{m_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - m_j)^{m_j}}{\lambda \prod_{i=0}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i})}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{m_i}{X - \alpha_i}$$

Donc $\frac{P'}{P}$ est décroissante, donc $P(x)P''(x) - P'^2(x)$ est négatif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'idée à retenir

Un très bon réflexe quand on cherche à déterminer le signe d'une fonction est de la dériver. Mais ce n'est pas toujours la bonne méthode. Cet exercice cherche à tester la capacité du candidat à ne pas foncer tête baisser, et à être capable de prendre du recul sur les différentes notions qu'il connait.

1.6 – ENS

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note $\lambda_1, \dots \lambda_m$ ses racines complexes distinctes.
   Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P, c'est-à-dire que si z est une racine de P', il existe des réels $t_1, \dots, t_m$ positifs avec $t_1 + \cdots + t_m = 1$ tels que
   $$z = \sum_{k=1}^{m} t_k \lambda_k$$

2. Soit P un polynôme de degré ≤ 4 tel que pour tout $i \in \{1, \dots, 3\}$, P et $P^{(i)}$ ont une racine commune. Montrer que P a une unique racine.

Indications.

1. Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

2. Raisonner par l'absurde et traiter toutes les formes possibles de P.

Correction.

1. Soit z une racine de P'. Si z est aussi racine de P, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on écrit
$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k},$$
On a
$$P' = \lambda \sum_{k=1}^{m} n_k (X - \lambda_k)^{n_k - 1} \prod_{l \neq k} (X - \lambda_l)^{n_l},$$
On en déduit que la décomposition en élément simple de $\frac{P'}{P}$ vaut :
$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{X - \lambda_k}$$
:
$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{z - \lambda_k}.$$
Comme z est racine de P', on a
$$0 = \sum_{k=1}^{m} n_k \frac{z - \lambda_k}{|z - \lambda_k|^2}.$$
On conclut en posant
$$t_k = \frac{\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}\lambda_k}{\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}}$$

2. Pour $a_1, \ldots, a_m$ des complexes, notons $Conv(a_1, \ldots, a_m)$ l'enveloppe convexe de $a_1, \ldots, a_m$, et $Conv^+(a_1, \ldots, a_m)$ l'enveloppe convexe stricte, c'est-à-dire l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ de la forme $z = t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m$ où les t_k sont tous **strictement** positifs, et de somme 1.

   Faisons quelques remarques préliminaires qui nous serviront dans la suite :

— si $d \in Conv^+(a,c)$ et $c \in Conv^+(a,b)$, alors $d \in Conv^+(a,b)$. (il suffit d'écrire les définitions pour prouver que cette propriété est vraie).

— On montre par simple écriture des définitions que si $a_1 \in Conv^+(a_1,\dots,a_m)$, alors $a_1 \in Conv^+(a_2,\dots,a_m)$.

— On a bien-sûr $Conv^+(a) = \{a\}$

— On a montré dans la question précédente qu'une racine de P' qui n'est pas racine de P est dans l'enveloppe convexe stricte des racines de P. En répétant, on a aussi qu'une racine de $P^{(i)}$ qui n'est pas racine de P est dans l'enveloppe convexe stricte des racines de P.

Commençons maintenant en séparant les cas selon le degré de P.

— Si $deg(P) = 2$, alors P admet une racine double (car P' et P ont une racine en commun) donc il possède une unique racine.

— Supposons que $deg(P) = 3$ et que P admette 2 racines distinctes. Il possède une racine double a et une racine simple b.

Les racines de P' sont donc a et c, avec $c \notin \{a,b\}$. On a donc $c \in Conv^+(a,b)$. Remarquons maintenant que l'unique racine de P'' est b(car P et P'' ont une racine commune, qui ne peut pas être a car sinon a serait racine triple de P).

On en déduit que $b \in Conv^+(a,c)$. Comme $c \in Conv^+(a,b)$, on trouve par les propriétés préliminaires que $b \in Conv^+(a,b)$ puis $b \in Conv^+(a)$ donc $b = a$. Contradiction.

— Supposons que $deg(P) = 4$ et que P admette a comme racine triple et b comme racine simple. L'unique racine de P''' ne peut pas être a (car sinon a serait racine triple, donc c'est b).

Les trois racines de P' sont a, c et d avec $c, d \notin \{a,b\}$. Ainsi b est dans $Conv^+(a,c,d)$. Mais $c \in Conv^+(a,b)$ et $d \in Conv^+(a,b)$ donc $b \in Conv^+(a,b)$.

Donc $b \in Con^+(a)$ donc $b = a$. Contradiction.

— Supposons que $deg(P) = 4$ et que P admette a et b comme racines doubles. P'' doit avoir une des racines parmi a, b, donc P a une racine triple. Contradiction.

— Dernier cas : supposons que $deg(P) = 4$ et que P admette a comme racine double, b et c comme racines simples. P et P'' doivent avoir une racine commune, qui ne peut pas être a (sinon a racine triple de P...). Sans perte de généralité, supposons que c'est b.

Les racines de P' sont a, d, e (avec $d, e \notin \{a, b, c\}$). On a alors $b \in Conv^+(a, d, e)$. Or $d \in Conv^+(a, b, c)$ et $e \in Conv^+(a, b, c)$, donc $b \in Conv^+(a, b, c)$ donc $b \in Conv^+(a, c)$.

Supposons maintenant que P'' admette une autre racine f. On ne peut pas avoir $f = c$, car sinon on aurait par symétrie $c \in Conv^+(a, b)$ donc $c \in Conv^+(a, c)$ donc $c = a$. On n'a pas non plus $f = a$ (sinon a racine triple de P). On en déduit que $f \in Conv^+(a, b, c)$. Donc $f \in Conv^+(a, c)$ (car $b \in Conv^+(a, c)$)...

Comme les racines de P'' sont simples, l'unique racine g de P''' ne peut être ni b ni f. On a donc $g \in Conv^+(b, f)$ donc $g \in Conv^+(a, c)$. Or P''' et P ont une racine commune. Comme g ne peut être a ou c, on en déduit que $g = b$. Contradiction.

P'' a donc b comme racine double. On peut donc l'écrire sous la forme

$$P'' = 12\lambda(X - b)^2$$

En intégrant deux fois, on trouve que P est de la forme

$$P = \lambda(X - b)^4 + \beta(X - b) = (X - b)\left[(X - b)^3 + \beta\right]$$

Or a est racine double de P , donc $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$. En remplaçant dans l'expression de P, on obtient $\beta = 0$, donc $P = \lambda(X - b)^4$ ce qui est absurde.

Ayant traité tous les cas contraires, on peut enfin en conclure que P ne possède qu'une seule racine.

L'idée à retenir

Un bel exercice. La première question est très classique et gagne à être sue (notamment avec la décomposition de $\frac{P'}{P}$).

La deuxième est bien plus originale. Une fois le résultat de la première question établi, l'exercice ne fait quasiment plus appel aux connaissances du candidat mais teste sa capacité de raisonnement. Il s'agit d'être capable d'enchainer une assez longue séquence d'arguments élémentaires abstraits.

On notera d'ailleurs que la simple lecture du corrigé sans le chercher préalablement est rébarbative et n'a que peu d'intérêt.

1.7 – Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme unitaire. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $Q_a = P(X+a)$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \geq r$, tous les coefficients de Q_a soient positifs.

Indications. Utiliser la formule de Taylor.

Correction. Soit $n = deg(P) = deg(Q)$. Par la formule de Taylor pour les polynômes, on a

$$Q_a = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_a^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

Or comme P est unitaire, tous les $P^{(k)}$ ont un coefficient dominant positif, donc tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

Il existe donc $N^{(k)} \in \mathbb{R}$ tel que $P^{(k)}(a) \geq 0$ pour tout $a \geq N^{(k)}$.

Donc si $a \geq N = \max_{0 \leq k \leq n} N^{(k)}$, on a $P^{(k)}(a) \leq 0$, Donc les coefficients de Q_a sont tous positifs.

L'idée à retenir

Facile une fois qu'on a pensé à la formule de Taylor, mais il faut quand même avouer qu'il n'est pour une fois pas évident au premier abord qu'on va devoir l'utiliser. Rien ne parle dans l'énoncé des dérivées de P.

1.8 – X/ENS

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

2. Déterminer le nombre de dérangements d_n de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations sans point fixe.

Indications. Pour la deuxième question, on pourra dénombrer les permutations selon leur nombre de points fixes.

Correction.

1. On commence à calculer sans se poser de questions

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a_j \\
&\text{(En intervertissant les deux } \Sigma\text{)} \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!}a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n}\frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!}a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n}\frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!}\frac{(n-j)!}{(n-j)!}a_j \\
&\text{(On veut faire apparaitre des coefficients binomiaux)} \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j\sum_{l=0}^{n-j}\binom{n-j}{l}(-1)^{n-l-j} \\
&\text{(avec le changement } l=k-j\text{)}
\end{aligned}$$

Si $j < n$, on reconnait un binôme de Netwon, et on a

$$\sum_{l=0}^{n-j}\binom{n-j}{l}(-1)^{n-l-j} = (1-1)^{n-j} = 0$$

Il ne reste donc que le terme pour $j = n$, et on a bien

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k = a_n$$

Donnons maintenant une autre démonstration de ce résultat, plus astucieuse mais très jolie. Considérons A la matrice

$$A = \left(\binom{j}{i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

On remarque que l'énoncé nous demande de prouver que A est inversible et que son inverse est

$$B = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Or A est la matrice de la base canonique de l'endomorphisme $P \in \mathbb{R}^n[X] \to P(X+1)$ (par le binôme de Netwon)
Cet endomorphisme admet clairement $P \in \mathbb{R}^n[X] \to P(X-1)$ comme inverse et, par binôme de Netwton, sa matrice est B.

2. Pour compter le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$, on peut compter les permutations ayant k points fixes pour $0 \leq k \leq n$. On les obtient en choisissant k points fixes, puis en choisissant une permutation des $(n-k)$ restants sans point fixe. Il y a donc $\binom{n}{k} d_{n-k}$ permutations avec k points fixes, et donc, le nombre total de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ étant $n!$:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

par ré-indexation et symétrie des coefficients binomiaux.
En appliquant la question précédente, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k)!} \end{aligned}$$

L'idée à retenir

La première question est accessible, puisqu'il suffit de savoir manipuler des sommes et des coefficients binomiaux. Cependant, on constate qu'un candidat avec plus de connaissances qui aura déjà étudié l'inversibilité matrice

$$A = \left(\binom{j}{i}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

saura résoudre cette question bien plus rapidement et disposera donc de plus de temps pour traiter la deuxième question (voire un deuxième exercice)...

1.9 – X/ENS

On pose $S = \{1, \ldots, 2000\}$. Déterminer le nombre de sous ensembles de S dont la somme des éléments est divisible par 5.

Indications. Poser

$$P = (1+X)(1+X^2)\ldots(1+X^{2000})$$

Y a-t-il un lien entre P et le problème ?

Correction. Introduisons le polynôme

$$P = (1+X)(1+X^2)\ldots(1+X^{2000})$$

P est un polynôme de degré $N = \frac{2000\times 2001}{2}$, il s'écrit sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$$

En développant (virtuellement...) P, on remarque que le coefficient a_k correspond exactement au nombre de sous ensembles de S dont la somme des éléments est divisible par 5.

Autrement dit, on cherche $\sum_{k=0}^{N/5} a_{5k}$.

Considérons $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

ζ est une racine 5-ieme de l'unité, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$1^k + \zeta^k + (\zeta^2)^k + (\zeta^3)^k + (\zeta^4)^k = \begin{cases} 5 & \text{si } k \text{ est multiple de 5,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N/5} a_{5k} &= \frac{1}{5}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k \left(1^k + \zeta^k + (\zeta^2)^k + (\zeta^3)^k + (\zeta^4)^k\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(P(1) + P(\zeta) + P(\zeta^2) + P(\zeta^3) + P(\zeta^4)\right) \end{aligned}$$

Or on se rappelle que

$$P = (1+X)(1+X^2)\dots(1+X^{2000})$$

On en déduit immédiatement que $P(1) = 2^{2000}$

Calculons maintenant $P(\zeta^j)$ pour $j \in \{1, \dots 4\}$. Déjà, comme ζ^j est une racine 5-ieme de l'unité, la suite $\left(\zeta^j)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est 5 périodique. On a donc

$$\begin{aligned} P(\zeta^j) &= (1+\zeta^j)(1+(\zeta^j)^2)\dots(1+(\zeta^j)^{2000}) \\ &= \left((1+\zeta^j)(1+(\zeta^j)^2)\dots(1+(\zeta^j)^5)\right)^{400} \\ &= \left(1+\zeta^0)(1+\zeta^2)\dots(1+\zeta^4)\right)^{400} \end{aligned}$$

(Quitte à réordonner dans la dernière égalité)

Or le polynôme $Q = X^5 - 1$ se factorise comme

$$Q = (X-1)(X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^3)(X-\zeta^4)$$

Ainsi on a

$$(1+\zeta^0)(1+\zeta^2)\dots(1+\zeta^4) = -Q(-1) = 2$$

Au final, on en conclut que

$$\sum_{k=0}^{N/5} a_{5k} = \frac{1}{5}\left(2^{2000} + 4 \times 2^{400}\right)$$

Il y a donc $\frac{1}{5}\left(2^{2000} + 4 \times 2^{400}\right)$ sous ensembles de $\{1, \dots, 2000\}$ dont la somme des éléments est divisible par 5.

L'idée à retenir

Un exercice qui fait apparaitre des complexes là où on les attend pas !

Il n'empêche qu'une fois qu'on a posé le polynôme P (qui serait sûrement donné très rapidement par l'examinateur), l'utilisation de $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ n'est pas si surprenante si on a en tête les propriété de périodicité des racines $n - ieme$ de l'unité.

1.10 – ENS

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

1. $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$

2. $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

3. $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

Indications.

2. Montrer que P est à coefficients réels.

3. Montrer que l'on peut se ramener au cas d'un polynôme à coefficients entiers, puis montrer que tout nombre premier divise le coefficient dominant a_n dès lors que $n \geq 2$. Conclure.

Correction.

1. Il est clair que les polynômes constants ne conviennent pas. Réciproquement, soit P non constant et $z \in \mathbb{C}$. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, le polynôme $P - z$ admet une racine $\omega \in \mathbb{C}$. Ainsi, quelque soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $P(\omega) = z$, et donc $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Nous allons montrer à l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange que P est à coefficients réels.

   Notons n le degré de P, et soient $x_0 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Comme $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, il existe des réels $y_0, \ldots, y_n$ tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}, P(x_i) = y_i$.

   D'après la formule d'interpolation de Lagrange, P s'écrit

   $$P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{j \neq i}(X - x_j)}{\prod_{x_j \neq x_i}(i - j)}$$

   Or tous les termes apparaissant dans cette expression sont réels, donc P est à coefficients réels.

   Il reste à trouver les polynômes à coefficients réels surjectifs, c'est à dire tels que $\mathbb{R} \subset P(\mathbb{R})$. Guidés par l'intuition graphique, nous allons montrer qu'il s'agit des polynômes de degré impair.

Traitons d'abord le cas d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré pair. P s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{i=0}^{2n} a_i X^i$. Quitte à remplacer P par $-P$, supposons $a_{2n} > 0$. On a alors $\lim_{x\to+\infty} P(X) = \lim_{x\to-\infty} P(X) = +\infty$. P étant continu, il est donc minoré sur R, et ne peut donc pas être surjectif.

Supposons maintenant que P soit de degré impaire. P s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i X^i$. Quitte à remplacer P par $-P$, supposons $a_{2n+1} > 0$. On a cette fois $\lim_{x\to-\infty} P(X) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(X) = +\infty$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P est bien surjectif sur $\mathbb{R}$.

On a démontré que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sont les polynômes à coefficients réels et de degré impairs.

3. On va montrer que les seuls polynômes qui conviennent sont les polynômes à coefficients rationnels et de degré 1.
Soit $P = aX + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Soit $y \in \mathbb{Q}$. Alors $P(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{Q}$, donc $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Réciproquement, donnons-nous par l'absurde un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ de degré $n \geq 2$ tel que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ (il est bien sûr évident que les polynômes constants ne conviennent pas). La même démonstration qu'à la question 2. montre que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Quitte à multiplier P par le produit des dénominateurs de ses coefficients, on peut supposer qu'il est à coefficients dans Z.

Soit m un nombre premier. Comme $P(\mathbb{Q}) = Q$, il existe $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $p \wedge q = 1$ et $P(\frac{p}{q}) = \frac{1}{m}$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = \frac{1}{m}$$

$$m\sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i} = q^n$$

Donc m divise q^n, et comme m est premier m divise q (lemme immédiat en considérant la décomposition en facteurs premier de q). Il existe alors un entier k tel que $q = km$, et l'on a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i} = kq^{n-1}$$
$$a_n p^n + \sum_{i=1}^{n} a_i p^i q^{n-i} = kq^{n-1}$$

Or, m divise q donc divise q^{n-i} pour $i \geq 1$, et divise q^{n-1}, car $n \geq 2$. Donc m divise $a_n p^n$. Or m est premier, donc m divise a_n ou p^n (penser à la décomposition en facteurs premiers). Mais m divise déjà q, et p et q sont premiers entre eux, donc m ne peut pas diviser p. Donc m divise a_n.

On vient de montrer que tout nombre premier divise a_n, ce qui est absurde.

L'idée à retenir

Cet exercice est très complet et de difficulté croissante. On ne s'attend pas ici à ce que le candidat résolve l'entièreté de l'exercice seul en une heure.

Chaque question a son utilité pour le déroulé de l'oral. La première sert à rentrer dans l'épreuve en mettant le candidat en confiance, et la seconde à voir comment il se comporte face à une question plus complexe. Enfin, la troisième question, bien plus difficile, permet de mettre en lumière la manière dont le candidat fait face à des difficultés, et comment il tire profit des indications de l'examinateur pour rebondir et progresser.

1.11 – Polytechnique

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X) - Q(X-1)$ et $Q(0) = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P = X^n$. Il existe alors un unique polynôme Q_n tel que $X^n = Q_n(X) - Q_n(X-1)$ et $Q_n(0) = 0$. Montrer que $Q_n'(X) = Q_n'(0) + n * Q_{n-1}(X)$.

Indications.

1. Penser à des notions d'algèbre linéaire.

2. Utiliser judicieusement l'unicité

Correction.

1. Commençons par montrer que si Q est un polynôme de degré m, alors $Q(X) - Q(X-1)$ est de degré $m-1$. On a $Q = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} &Q(X) - Q(X-1) = \\ &a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} - (a_m(X-1)^m + a_{m-1}(X-1)^{m-1}) + \hat{Q} \end{aligned}$$

avec $deg(\hat{Q}) < m-1$. Il suit

$$\begin{aligned} &Q(X) - Q(X-1) = \\ &a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} - a_m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{n-k} X^k \\ &- a_{m-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m-1}{k} (-1)^{m-1-k} X^k + \hat{Q} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &Q(X) - Q(X-1) = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} - a_m X^m \\ &- a_m m(-1)^{m-1} X^{m-1} - a_{m-1}X^{m-1} + \tilde{Q} \end{aligned}$$

avec $deg(\tilde{Q}) < m-1$.
Donc $Q(X) - Q(X-1) = -a_m m(-1)^{m-1}X^{m-1} + \tilde{Q}$, donc $deg(Q(X) - Q(X-1) = m-1$

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. On vient de montrer qu'un polynôme Q tel que $P(X) = Q(X) - Q(X-1)$ est forcément de degré $n+1$.

Soit $E = \{Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \mid Q(0) = 0\} = \{XQ, Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, et que $dim(E) = n$. Posons

$$\begin{aligned} \varphi \colon E &\to R_n[X] \\ Q &\mapsto Q(X) - Q(X-1) \end{aligned}$$

φ est bien une application linéaire, et φ est injective. En effet, si $\varpi(Q) = 0$, alors $Q(X) = Q(X-1)$, et il suit par récurrence que $Q(m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (car $Q(0) = 0$). Q a une infinité de racines donc est le polynôme nul.

φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension, donc elle est bijective. On en déduit donc qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X) - Q(X-1)$ et $Q(0) = 0$.

2. On a $X^n = Q_n(X) - Q_n(X-1)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} nX^{n-1} &= Q'_n(X) - Q'_n(X-1) \\ &= (Q'_n(X) - Q'n(0)) - (Q'_n(X-1) - Q'_n(0)) \end{aligned}$$

Donc en posant $\tilde{Q} = Q'_n(X) - Q'_n(0)$, on a $nX^{n-1} = \tilde{Q(X)} - \tilde{Q(X-1)}$ et (par construction) $Q(0) = 0$.

Mais on sait aussi que $nX^n - 1 = n * Q_{n-1}(X) - n * Q_{n-1}(X-1)$

Par l'unicité démontrée à la question 1, il suit que $\tilde{Q} = n * Q_n$, et donc $Q_n(X) = n * Q_{n-1}(X) - Q'_n(0)$.

L'idée à retenir

Un grand classique, qui montre la puissance de l'algèbre linéaire là où on ne l'attend pas.

Chapitre 2

Algèbre linéaire

Chapitre 2 (Algèbre linéaire)

Énoncés

2.1 – Polytechnique

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $deg(P) = n$. Montrer que $(P, \Phi(P), \ldots, \Phi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2 – Polytechnique

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f est inversible et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. On suppose que g est diagonalisable. Montrer que g est de rang pair.

2. On suppose que le noyau et l'image de g sont en somme direct. Montrer que g est de rang pair.

3. Est-ce que g est de rang pair en général ?

2.3 – Polytechnique

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u.

2.4 – Polytechnique

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

2.5 – Polytechnique

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $rg(A) = rg(B)$. Montrer que $A^2B = A$ si et seulement si $B^2A = B$.

2.6 – X/ENS

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $rg(AB) + rg(BC) \leq rg(B) + rg(ABC)$.

2.7 – ENS

Soient $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. Montrer qu'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i).$$

2.8 – ENS

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.9 – X/ENS

On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation

$$X^2 = J$$

2.10 – X/ENS

1. Soit $A \in \mathcal{G}_{ln}(\mathbb{C})$. On suppose que A est semblable à A^k pour tout $k \geq 1$. Montrer que $A - I_n$ est nilpotente.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A - I_n$ est nilpotente. Montrer que A est semblable à A^k pour tout $k \geq 1$.

2.11 – Polytechnique

Soit

$$A = (A_{i,j})_{i,j} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

une matrice antisymétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$A' = (A_{i,j} + \lambda)_{1 \leq i,j \leq 2n}.$$

Montrer que $det(A) = det(A')$.

2.12 – Polytechnique

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U, V \in M_n(\mathbb{R})$ tels que

$$A = \lambda U + \mu V, \quad A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V, \quad \text{et} \quad A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

2.13 – Polytechnique

Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Trouver l'ensemble des matrices $B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que

$$B + B^t = 2\,\mathrm{tr}(B)A.$$

2.14 – ENS

On pose

$$\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to M^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Calculer $det(\phi)$

Chapitre 2 (Algèbre linéaire)

Corrigés

2.1 – Polytechnique

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $deg(P) = n$. Montrer que $(P, \Phi(P), \ldots, \Phi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Indications. Calculer $deg(\Phi - \mathrm{id})$

Correction.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant de degré n. On pose
$$Q = P(X+1) - P(X) = (\Phi - \mathrm{id})(P)$$
Écrivons P sous la forme
$$P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p$$
On a
$$Q = \sum_{p=0}^{n} a_p \left[(X+1)^p - X^p\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{k=0}^{p-1} (X+1)^k X^{p-1-k}$$

Or pour tout $p \leq n$,

$$deg\left(\sum_{k=0}^{p-1} (X+1)^k X^{p-1-k}\right) = p-1$$

car il s'agit d'une somme de polynômes de degré $p-1$ et **à coefficients strictement positifs**.

Donc $deg(Q) = n-1$.

On en déduit que $(\Phi - \mathrm{id})^{n+1} = 0$, donc que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.

2. D'après la question précédente, la famille $(P, \Phi(P), \ldots, \Phi^n(P))$ est échelonnée donc elle est libre. Comme elle comporte $n+1$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'idée à retenir

Dans un exercice avec des polynômes, le degré est souvent le meilleur ami du candidat.

2.2 – Polytechnique

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f est inversible et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. On suppose que g est diagonalisable. Montrer que g est de rang pair.

2. On suppose que le noyau et l'image de g sont en somme direct. Montrer que g est de rang pair.

3. Est-ce que g est de rang pair en général ?

Indications. Écrire la relation donnée comme une relation de similitude. Quelles caractéristiques communes partagent deux matrices semblables ?

Correction.

1. La relation
$$f \circ g + g \circ f = 0$$
se réécrit
$$-g = f \circ g \circ f^{-1}$$
donc g et $-g$ sont semblables. Ils ont donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité. Ainsi, si λ est valeur propre de g de multiplicité m, $-\lambda$ l'est également. g a donc un nombre pair de valeurs propres non nulles (comptées avec multiplicité).

   Maintenant, g est diagonalisable, donc la dimension de chaque espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre associée. De plus, la somme des multiplicités de ses valeurs propres est égale à la dimension de E.

   Comme $Ker(g)$ est l'espace propre associé à la valeur propre 0, le théorème du rang assure que le rang de g est égal à la somme des multiplicité de ses valeurs propres non nulles.

   On a donc bien montré que le rang de g est pair.

2. Comme le noyau et l'image de g sont en somme direct, on obtient que la matrice de g dans une base adaptée est de la forme
$$G = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & G' \end{array}\right)$$

Avec G' de dimension $rg(g)$. Du fait que g et $-g$ sont semblables, il découle directement que G' est $-G'$ sont semblables. Ils ont donc les mêmes valeurs propres avec même multiplicité, et celles-ci sont toutes non-nulles.

Ainsi, si λ est valeur propre de G' de multiplicité m, $-\lambda$ l'est également. De plus, la somme des multiplicité de ces valeurs propres est égale à la dimension de G', qui est donc pair et qui est aussi le rang de g.

3. Cette propriété est fausse dans le cas général. Considérons la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons g l'endomorphisme dont G est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On considère la base $(e_1, -e_2)$. Il est alors clair que la matrice de g dans cette base est

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc g est semblable à $-g$, or on a $rg(g) = rg(G) = 1$.

L'idée à retenir

La clé de cet exercice est de faire le lien entre le rang et les valeurs propres non nulles.

2.3 – Polytechnique

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u.