L3 - M1
Agrégation
Écoles d'ingénieurs

Marc BRIANE
Gilles PAGÈS

Analyse
Théorie de l'intégration

8e édition

Intégrale de Lebesgue • Convolution
Transformées de Fourier et de Laplace

COURS COMPLET

- Plus de 260 exercices avec solutions
- QCM corrigés
- Problèmes d'examens

deboeck SUPÉRIEUR

Marc Briane
Gilles Pagès

Analyse

Théorie de l'intégration

Intégrale de Lebesgue • Convolution
Transformées de Fourier et de Laplace

8e édition

de boeck SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

En couverture : Coupe d'un nautile © Bereta/Getty Images
Maquette et mise en page des auteurs
Conception et réalisation de couverture : Primo&Primo

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2023/13647/094
Bibliothèque nationale, Paris : août 2023
ISBN : 978-2-8073-5955-0

Sommaire

Table des matières

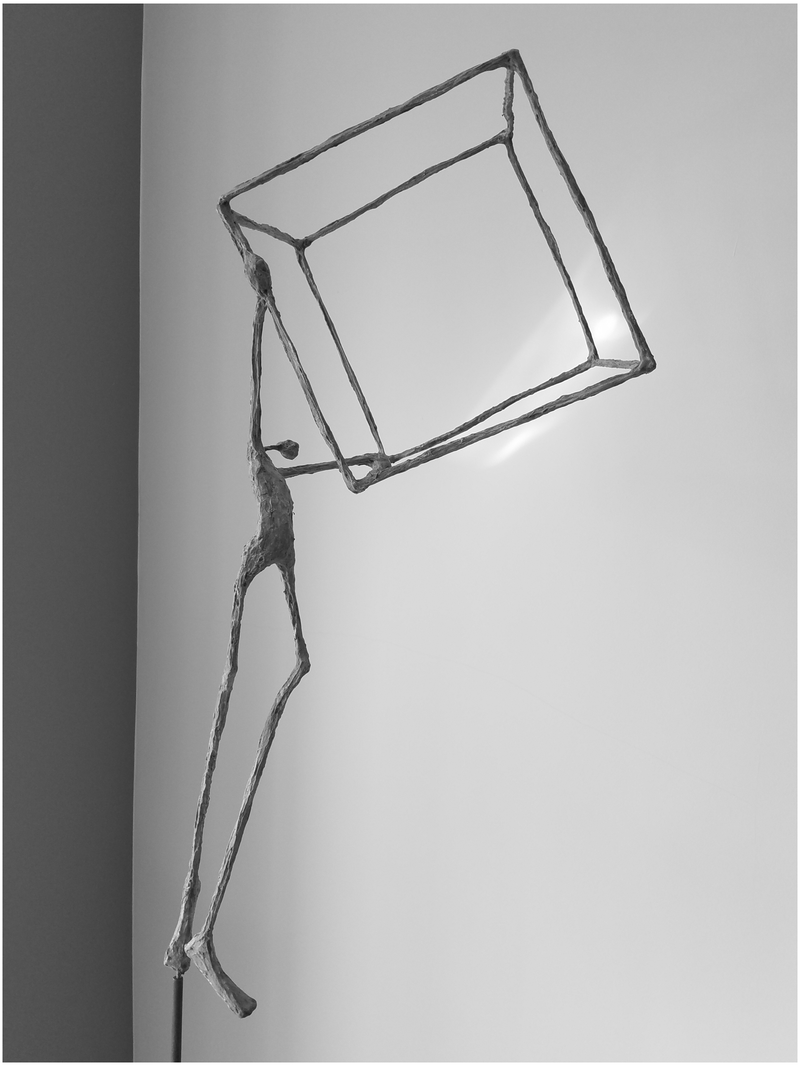

FIGURE 1 – *Sculpture en volume*, D. Lorilleux, création 2021
Galerie Laute, Rennes, https ://galerielaute.com/

Avant-propos

à la huitième édition

Ce livre, issu d'un cours d'intégration dispensé durant plusieurs années en Licence de Mathématiques à l'Université Paris XII Val de Marne puis à Sorbonne Université (anciennement Université Paris VI Pierre & Marie Curie) ainsi que depuis 2014 en troisième année (niveau L3) à l'INSA Rennes, est prioritairement destiné aux étudiants achevant leur parcours de Licence (L3) ou entamant un parcours de Master (M1) spécialisé en Mathématiques. À un premier niveau de lecture, nous y exposons les bases indispensables de la théorie de Lebesgue et ses premières applications. Les connaissances requises à l'usage de cet ouvrage sont celles d'un étudiant issu de deuxième année (niveau L2). En outre, nous avons souhaité que le lecteur puisse y trouver matière à référence au-delà de la licence, en maîtrise, pour l'agrégation, voire en troisième cycle. C'est dans cette optique que nous avons complété ce premier niveau de lecture par la démonstration détaillée des grands théorèmes classiques de la théorie (construction de la mesure de Lebesgue, théorèmes de Riesz, de Lusin, etc.). Parallèlement, nous avons mis l'accent, à travers de nombreuses applications, sur la puissance de l'intégrale de Lebesgue dans tous les problèmes mettant en jeu des interversions des symboles d'intégrale et de limite. Chaque chapitre s'achève par une section d'exercices, mêlant des énoncés de simple manipulation des définitions et des énoncés plus ambitieux.

Pour la plupart des exercices, le lecteur peut s'appuyer sur des indications regroupées en fin de volume, dans le chapitre 18. Nous savons, en effet, par expérience que des indications plutôt que des corrigés détaillés des exercices, permettent au lecteur – nous pensons particulièrement aux étudiants qui doivent être acteurs de leur apprentissage des mathématiques et se confronter aux difficultés de la discipline (Figure 1 ci-contre) – de mieux s'approprier les techniques fondamentales de l'intégrale de Lebesgue (théorème de convergence dominée, théorèmes de Fubini, changement de variables, convolution, transformées de Fourier et de Laplace). Néanmoins, les nouveaux exercices sur les transformées de Fourier et de Laplace ainsi que quelques autres plus anciens y font l'objet de corrections plus détaillées. Plus généralement, ce chapitre 18 regroupe des indications de résolution fonction de la difficulté des questions posées. Les exercices dans chaque chapitre ne suivent pas nécessairement l'ordre du chapitre. Cette configuration devrait permettre aux lecteurs de butiner au gré des difficultés, tels des abeilles *ouvrières*. Ils pourront ainsi démontrer – *via* neuf approches inspirées en partie de la compilation de R. Chapman ([1]) et déclinées sous forme d'exercices au fil des chapitres (*cf.* Bâle dans l'index) – la célèbre formule suivante, établie pour la première fois par

1. R. Chapman, "Evaluating $\zeta(2)$", Department of Mathematics, University of Exeter, 07-2003.

le mathématicien suisse Euler en 1735 ([2]) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ou bien les étonnantes identités suivantes (*cf.* exercices 15.24 et 15.25) :

$$\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi,$$

qui illustrent l'intimité entre dénombrabilité, sommation et intégration, trois notions indissociables de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

La théorie de l'intégration peut être abordée naturellement sous deux angles très différents : la présentation fonctionnelle, issue de Bourbaki, qui prolonge l'intégrale de Riemann *via* le théorème de représentation de Riesz, et l'approche abstraite, qui s'appuie directement sur la notion de mesure positive. Nous avons choisi la seconde voie, non seulement pour son caractère (paradoxalement) plus concret, mais aussi parce qu'elle permet l'introduction naturelle des probabilités et de la statistique. La contrepartie pour les futurs “analystes” est sans doute de longs développements sur la mesurabilité. Quoi qu'il en soit, il nous semble que la mesure abstraite reste la plus accessible des deux approches pour les étudiants d'aujourd'hui, sans doute par son caractère moins topologique.

L'ouvrage se divise en six parties :

– La partie I, rappels et préliminaires, après un bref retour sur l'intégrale élémentaire qui permettra de mettre en perspective les atouts décisifs de la théorie de Lebesgue, est essentiellement consacrée à quelques éléments de théorie des cardinaux et de topologie. La notion de dénombrabilité, au cœur de l'approche de Borel et Lebesgue, est notoirement mal connue des étudiants de premier cycle. L'occasion leur est donnée de faire le point sur cette question. Les “rappels” de topologie mêlent quelques développements sur les notions de base déjà vues en cours de structures métriques à des points plus techniques – la séparabilité notamment – qui se révèleront indispensables à la suite de notre propos.

– La partie II, théorie de la mesure, bâtit les fondations de la théorie de l'intégration : tribus, fonctions mesurables, mesures positives. Un accent tout particulier est mis sur la mesure de Lebesgue. Plusieurs voies d'approfondissement sont développées : le théorème de Carathéodory et la construction des mesures de Lebesgue et Stieltjes sur la droite réelle ; la régularité des mesures sur des espaces localement compacts ou séparables complets.

– La partie III, théorie de l'intégration, débute par la construction de l'intégrale au sens de Lebesgue. On enchaîne par les trois théorèmes classiques (Beppo Levi,

2. L. Euler, “De summis serierum reciprocarum”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7 (1740), 123-134. Archivé dans *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 73-86 (E41).

Fatou, Lebesgue) et les outils d'étude des intégrales dépendant d'un paramètre (continuité et dérivation ponctuelle sous le signe somme). Les espaces L^p et les théorèmes de densité – dont le théorème de Lusin – sont développés ensuite, puis viennent la mesure produit, les théorèmes de Fubini et le théorème de changement de variables ainsi que leurs applications au calcul d'intégrales multiples. Cette partie s'achève sur la notion de complétion de mesure et sur ses conséquences, en particulier le théorème de Fubini-Lebesgue.

– La partie IV, convolution et transformées de Fourier et de Laplace, est consacrée à des prolongements essentiels de la théorie de l'intégration : la convolution sur $\mathbb{R}^d$ et les transformées de Fourier et de Laplace sur $\mathbb{R}^d$, outils de base de l'Analyse harmonique mais aussi des Probabilités. Ces notions peuvent être vues comme des applications importantes des théorèmes de convergences de la partie III. La convolution avec la notion d'identités approchées est un outil indispensable dans les transformées, notamment pour les théorèmes d'inversion de Fourier (dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$) qui demeurent parmi les plus beaux résultats de l'Analyse, et qui sont aussi le point de départ de l'Analyse harmonique qui a connu ces dernières décennies un essor considérable avec le traitement d'images. Nous avons introduit dans cette huitième édition la transformée de Laplace comme prolongement naturel de la transformée de Fourier, sans la détailler autant, mais en insistant sur ses applications avec une vingtaine de nouveaux exercices très développés (sur 13 pages), traitant notamment de la résolution de diverses équations (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations aux différences finies). Avec en points d'orgue : le théorème de Bernstein-Widder dont la démonstration (*cf.* exercice 15.39) repose sur tous les théorèmes fondamentaux de l'intégrale de Lebesgue, et l'intégrale de Riemann-Liouville (*cf.* exercice 15.40) étroitement liée à la notion de dérivée fractionnaire, qui termine cet ouvrage.

– La partie V est constituée d'énoncés de QCM et de problèmes d'examen.

– La partie VI propose 30 pages d'indications détaillées (en petits caractères) des 261 exercices que comporte l'ouvrage, et les réponses aux QCM.

Signalons qu'en guise d'introduction, la partie II débute par la reproduction intégrale du texte de la Note aux *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* d'Henri Lebesgue parue en 1901 et intitulée :

"Sur une généralisation de l'intégrale définie".

Il y présente, en quatre feuillets d'une puissance et d'une beauté mathématique saisissantes, les principes fondateurs et les premiers résultats de sa théorie.

Les parties dont le titre est précédé du symbole ♣, correspondent à des compléments ou des approfondissements qui peuvent être passées en première lecture. De même, certaines applications s'éloignant par trop du cœur de notre propos ou s'apparentant à des exercices corrigés ont été transcrits en plus petits caractères. Une table des matières détaillée introduit l'ouvrage et un index avec 477 entrées (dont un certain nombre de doubles entrées) le conclut.

Pour une large part, notre goût commun pour l'intégration nous a été transmis par nos professeurs, le regretté J. Deny et O. Kavian. Cet ouvrage leur doit beaucoup.

Les judicieux conseils et les encouragements de P.G. Ciarlet nous ont également été précieux.

Si toutes les erreurs sont les nôtres, plusieurs personnes ont contribué à en diminuer le nombre depuis la première édition : Omer Adelman, Marie-Dominique de Cayeux, Yannick Baraud, Fabienne Comte, François James, Laurence Marsalle, Patrick Polo, Jacques Roubaud, Emmanuel Roy, Dominique Simpelaere, Sergio Vega. Qu'elles en soient ici remerciées. Un remerciement tout particulier à Yannick Joncour pour son énorme travail de relecture : il a débusqué dans la 7ème version de l'ouvrage un certain nombre de coquilles !

Marc Briane et Gilles Pagès

Paris et Rennes, le 26 juin 2023.

Notations

Ensembles

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathscr{P}(X)$: ensemble des parties de l'ensemble X.

${}^{c}A$: complémentaire de la partie A de X.

$\mathbb{1}_A$: fonction caractéristique de A, *i.e.* $\mathbb{1}_A(x) := 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) := 0$ si $x \in {}^{c}A$.

$\subset$: inclusion au sens large.

Δ : différence symétrique.

card X : cardinal de l'ensemble X.

$X \hookrightarrow Y$: injection de X dans Y.

$\mathscr{O}(X)$: ensemble des ouverts de l'espace métrique X.

$\overline{A}$: adhérence de la partie A.

$\mathring{A}$: intérieur de la partie A.

∂A : frontière de la partie A.

$\sigma(\mathscr{C})$: tribu engendrée par la partie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}(X)$.

$\Lambda(\mathscr{C})$: λ-système engendré par la partie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}(X)$.

$\mathscr{A} \times \mathscr{B}$: ensemble des rectangles $A \times B$ à côtés mesurables.

$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$: produit tensoriel des tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

$(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$: complété de l'espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

supp$f$: support de la fonction f.

μ-*p.p.* : μ presque partout.

$\lim\limits_{n}^{\uparrow} A_n = \bigcup\limits_{n \geq 0}^{\uparrow} A_n$: réunion de la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 0}$, croissante pour $\subset$.

$\lim\limits_{n}^{\downarrow} A_n = \bigcap\limits_{n \geq 0}^{\downarrow} A_n$: intersection de la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 0}$, décroissante pour $\subset$.

Fonctions

$f(x_+)$: limite à droite de f en x.

$f(x_-)$: limite à gauche de f en x.

sgn : fonction signe (vaut 0 en 0).

$\Re(f)$: partie réelle de f.

$\Im(f)$: partie imaginaire de f.

$|f|$: module de f.

f^+ : maximum entre f et 0.

f^- : maximum entre $-f$ et 0.

$f \vee g$: maximum entre f et g.

$f \wedge g$: minimum entre f et g.

$\sup\limits_{i\in I} x_i$: borne supérieure de la famille de réels $(x_i)_{i\in I}$.

$\inf\limits_{i\in I} x_i$: borne inférieure de la famille de réels $(x_i)_{i\in I}$.

$\equiv$: identiquement égal à.

dist (x, A) : distance du point x à la partie A.

Convergence de suites

$\lim\limits_n f_n$: limite de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

$\lim\limits_n^{\uparrow} f_n$: limite de la suite croissante $(f_n)_{n\geq 0}$.

$\lim\limits_n^{\downarrow} f_n$: limite de la suite décroissante $(f_n)_{n\geq 0}$.

$\overline{\lim\limits_n} f_n$: limite supérieure de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

$\underline{\lim\limits_n} f_n$: limite inférieure de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

$f_n \to f$: la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f.

$f_n \uparrow f$: la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers f.

$f_n \downarrow f$: la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en décroissant vers f.

$f_n \xrightarrow{S} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f.

$f_n \xrightarrow{U^t} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction f.

$f_n \xrightarrow{p.p.} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge presque partout vers la fonction f.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$: la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en norme $\|\cdot\|$ vers la fonction f.

Espaces de fonctions

$\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K})$: ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

$\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$: ensemble des fonctions Riemann-intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

$\mathscr{C}(X,Y)$: ensemble des fonctions continues de X dans Y.

$\mathscr{C}_K(X,Y)$: ensemble des fonctions continues de X dans Y, à support compact.

$\mathscr{C}_0(\Omega,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions continues de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$, de limite nulle à l'infini.

$\mathscr{C}^n(\Omega,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$, n fois différentiables sur Ω.

$\mathscr{C}^n_K(\Omega,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^n(\Omega,\mathbb{K})$, à support compact inclus dans Ω.

$\mathscr{C}^n_b(\Omega,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^n(\Omega,\mathbb{K})$, à dérivées bornées.

$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$: ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{K}$, de puissance $p^{\text{ème}}$ μ-intégrable.

$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{K}}(\lambda_d)$: ens. des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, λ_d-intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
$\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$: ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{K}$, μ-essentiellement bornées.
$L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$: ensemble des classes de fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour l'égalité μ-presque partout.
$\mathrm{Lip}_b(X,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$, lipschitziennes bornées.
$\mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{K})$: ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$, lipschitziennes à support compact.

Normes

$|x|$: norme de x dans $\mathbb{K}^d$.
$\|f\|_{\mathrm{sup}}$: norme sup de (la fonction) f.
$\|f\|_p$: (semi-)norme L^p de (la fonction) f.
$\|f\|_\infty$: (semi-)norme du supremum essentiel de (la fonction) f.

Première partie

Rappels et préliminaires

Chapitre 1

Intégrale au sens de Riemann

Ce chapitre est constitué de rappels sur l'intégrale de Riemann et ne comporte pas de démonstrations pour lesquelles nous renvoyons, par exemple, à [32] ou [31]. Il a simplement pour but de mettre en évidence certaines des insuffisances de cette théorie, élaborée par le mathématicien allemand Riemann dans sa thèse de doctorat [5] (soutenue en 1854 et publiée en 1857). Ses travaux généralisaient de façon décisive ceux du mathématicien français Cauchy, auteur dans les années 1820 d'une première théorie essentiellement rigoureuse de l'intégration des fonctions continues. Les deux grands précurseurs de la théorie de l'intégration au 18$^{\text{ème}}$ siècle sont incontestablement Newton – qui développa sous le nom de *fluxion* une approche systématique de la réciproque de la dérivation – et Leibniz – pour son approche géométrique fondée sur le calcul d'aire.

Notations : Dans la suite, on se placera sur un intervalle compact $[a, b]$, non vide et non réduit à un point ($-\infty < a < b < +\infty$). La lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Intégrale des fonctions en escalier

***Définition* 1.1.** (a) *On appelle* subdivision *de l'intervalle* $[a, b]$ *tout* $(n+1)$*-uplet* $\sigma := (a_0, \ldots, a_n)$ *vérifiant* $a := a_0 < \cdots < a_n := b$.

(b) *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est* en escalier *s'il existe une subdivision* $(a_0, \ldots, a_n)$ *de* $[a, b]$ *et des éléments* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *de* $\mathbb{K}$ *tels que*

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall\, x \in\,]a_{i-1}, a_i[, \quad f(x) = \lambda_i. \tag{1.1}$$

On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions en escalier de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{K}$.

(c) *L'intégrale de* f *relativement à une subdivision* σ*, provisoirement notée* $I(f, \sigma)$*, est définie par*

$$I(f, \sigma) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, (a_i - a_{i-1}).$$

Remarques : • Une fonction en escalier n'est en fait pas spécifiée aux points a_i de la subdivision et l'intégrale $I(f,\sigma)$ ne dépend donc pas de la valeur de f en ces points.
• On vérifie d'autre part que $I(f,\sigma)$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie *sous réserve que celle-ci soit "adaptée"* à f, *i.e.* vérifie la relation (1.1).

Notations : La seconde remarque nous conduit à faire disparaître σ dans la notation de l'intégrale. En pratique, on note l'intégrale de f entre a et b indifféremment par les symboles $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. La variable x est "muette", *i.e.* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$, etc.

***Proposition* 1.1.** (a) $\displaystyle\int_a^b : (\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *est une forme linéaire, continue puisque* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)\,\|f\|_{\sup}$ *où* $\displaystyle\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *désigne la norme uniforme (le* sup *est nécessairement fini car* f *ne prend qu'un nombre fini de valeurs).*
(b) *Si* $f,\ g \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$*, alors* $\displaystyle f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g.$
(c) *Si* $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{K})$*, alors* $|f| \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$ *et* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$

1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

***Définition* 1.2.** $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *est* Riemann intégrable – *ou* intégrable au sens de Riemann – *si*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\Phi_\varepsilon \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \exists\,\Psi_\varepsilon \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}_+)\ \ \textit{telles que}\ \left\{\begin{array}{l} |f-\Phi_\varepsilon| \le \Psi_\varepsilon \\ \textit{et} \\ \displaystyle\int_a^b \Psi_\varepsilon \le \varepsilon. \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions Riemann intégrables définies sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

Remarques : • On a en particulier pour $\varepsilon=1$, $|f| \le |\Phi_1| + \Psi_1$ donc une fonction *Riemann intégrable* est toujours *bornée*.
• Évidemment $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ [prendre $\Phi_\varepsilon := f$ et $\Psi_\varepsilon := 0$].

Construction de l'intégrale (esquisse) : Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$. En prenant successivement $\varepsilon := \frac{1}{n}$, $n \ge 1$, la définition 1.2 entraîne l'existence de deux suites

$(\tilde{\Phi}_n)_{n\geq 1}$ et $(\tilde{\Psi}_n)_{n\geq 1}$ vérifiant, pour tout $n\geq 1$, $|f-\tilde{\Phi}_n|\leq \tilde{\Psi}_n$ et $\displaystyle\int_a^b \tilde{\Psi}_n \leq \frac{1}{n}$. Par suite,

$$\forall\, p,\, q\in \mathbb{N}^*, \quad |\tilde{\Phi}_p-\tilde{\Phi}_q| \leq |\tilde{\Phi}_p - f| + |\tilde{\Phi}_q - f| \leq \tilde{\Psi}_p + \tilde{\Psi}_q$$

et, partant,

$$\forall\, p,\, q\in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_a^b \tilde{\Phi}_p - \int_a^b \tilde{\Phi}_q\right| \leq \int_a^b |\tilde{\Phi}_p-\tilde{\Phi}_q| \leq \int_a^b (\tilde{\Psi}_p+\tilde{\Psi}_q) \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

La suite $\displaystyle\left(\int_a^b \tilde{\Phi}_n\right)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}$; par conséquent elle converge vers une limite ℓ finie. On vérifie ensuite immédiatement que ℓ ne dépend pas des suites $\tilde{\Phi}_n$ et $\tilde{\Psi}_n$ sous réserve que $|f-\tilde{\Phi}_n|\leq \tilde{\Psi}_n$ et $\displaystyle\lim_n \int_a^b \tilde{\Psi}_n = 0$.

***Définition* 1.3.** *La limite commune aux suites* $\displaystyle\left(\int_a^b \tilde{\Phi}_n\right)_{n\geq 1}$ *est notée* $\displaystyle\int_a^b f$. *C'est l'intégrale – au sens de Riemann – de la fonction* f *sur l'intervalle* $[a,b]$.

***Proposition* 1.2.** (a) $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et*

$$\int_a^b : (\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_{\text{sup}}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme linéaire continue de norme $b-a$.

(b) *Si* $f\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ *alors* $|f|\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R}_+)$ *et* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(c) *Soit* $\varphi : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *une application* $\mathbb{R}$*-linéaire. Alors, pour toute fonction* f *dans* $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{C})$, $\varphi(f)\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{C})$ *et*

$$\int_a^b \varphi(f) = \varphi\left(\int_a^b f\right).$$

(d) *Si* $f,\, g\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ *alors* $f\,g\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$.

Exercice : Montrer que si $f_1,\ldots,\, f_n\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R})$ et si $\varphi : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est monotone “coordonnée par coordonnée”, alors $\varphi(f_1,\ldots,f_n)\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R})$.

***Application* 1.1.** (a) Du point (b) de la proposition précédente, on déduit la positivité et la croissance de l'intégrale au sens où

$$\forall\, f,\, g\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R}) \quad f\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0 \quad \text{et} \quad f\geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(b) Du point (c), on déduit que si $f\in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{C})$, alors $\Re(f)$, $\Im(f)$ et $\bar{f}$ sont Riemann intégrables.

***Proposition* 1.3.** *(Relation de Chasles) Soit* $c \in]a,b[$. *Si* $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ *alors les restrictions de* f *à* $[a,c]$ *et* $[c,b]$ *sont Riemann intégrables et*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Conventions : • Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^a f := 0$.

• Pour tous réels $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Il est essentiel de noter que, au vu de ces conventions, la relation de Chasles s'étend à tout triplet a, b, c de réels dès que la fonction f est Riemann intégrable sur l'intervalle $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$.

***Proposition* 1.4** (Intégrale et convergence uniforme)**.** *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions de* $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ *qui converge uniformément vers* f*,* i.e. $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$, *alors*

$$f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Citons encore un critère de Riemann intégrabilité, souvent utile dans les applications.

***Proposition* 1.5.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée et Riemann intégrable sur tout intervalle* $[\alpha, \beta]$ *contenu dans* $]a,b[$. *Alors* f *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$.

À ce stade, la question naturelle est évidemment de savoir s'il existe des fonctions Riemann intégrables en dehors des fonctions en escalier.

1.3 Fonctions réglées

***Définition* 1.4.** *Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *est* réglée *s'il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions en escalier convergeant uniformément vers* f.

En d'autres termes, les fonctions réglées constituent l'adhérence des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions bornées pour la norme de la convergence uniforme $\| \,.\, \|_{\sup}$.

***Proposition* 1.6.** *Si une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *est réglée, alors* $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$.

Ce résultat est un corollaire immédiat de la proposition 1.4.

***Théorème* 1.1.** *Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *est réglée si et seulement si elle possède une limite à droite en chaque point de* $[a,b[$ *et une limite à gauche en chaque point de* $]a,b]$ *(ces limites s'entendent dans* $\mathbb{K}$*).*

***Corollaire* 1.1.** (a) $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$.

(b) *Si une fonction* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est monotone, alors* f *est Riemann intégrable.*

Exemples : 1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x):=\sin(1/x)$ si $x\in]0,1]$ et $f(0):=0$. La fonction f n'est pas réglée puisque f n'a pas de limite en 0^+. Elle est cependant Riemann intégrable, d'après la proposition 1.5, puisque f est continue sur $]0,1]$ et bornée sur $[0,1]$.

2. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x):=0$ si $x\notin\mathbb{Q}$ et $f(x):=\dfrac{1}{q}$ si $x=\dfrac{p}{q}$, pgcd$(p,q)=1$, est réglée (*cf.* exercice 1.3).

3. La fonction indicatrice des rationnels sur $[0,1]$ définie par $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x):=1$ si $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x):=0$ sinon, n'est pas Riemann intégrable.
En effet, soient $\varphi,\psi\in\mathscr{E}([0,1],\mathbb{R})$, $\psi\geq 0$ telles que $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}-\varphi|\leq\psi$. Il vient $\varphi-\psi\leq\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\leq\varphi+\psi$. Or $\varphi\pm\psi$ étant en escalier, on a nécessairement, sauf éventuellement en un nombre fini de points, $\varphi-\psi\leq 0\leq 1\leq\varphi+\psi$: en effet, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert non vide contient à la fois des rationnels et des irrationnels. En particulier, $1-\psi\leq\varphi\leq\psi$ et donc $\psi\geq\frac{1}{2}$ sauf sur un ensemble fini. D'où $\displaystyle\int_0^1\psi\geq\frac{1}{2}$. Ceci contredit la définition de la Riemann intégrabilité dès que $\varepsilon<1/2$.

On notera cependant que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est "très souvent" nulle et qu'il semblerait raisonnable de poser $\displaystyle\int_0^1\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}=0$.

***Application* 1.2.** (a) *Riemann intégrabilité et convergence simple* : Soient $(r_n)_{n\geq 1}$ une numérotation des rationnels de $[0,1]$ et $f_n(x):=\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x)$, $n\geq 1$. Les fonctions f_n sont clairement en escalier donc Riemann intégrables. D'autre part, pour tout $x\in[0,1]$, $\lim\limits_n f_n(x)=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ qui n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$. On en déduit que $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas stable pour la convergence simple.

(b) *Composition de fonctions Riemann intégrables* : Soient f, g deux fonctions respectivement définies par :

– $f(x):=0$ si $x\notin\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $f(x):=\dfrac{1}{q}$ si $x=\dfrac{p}{q}$, pgcd$(p,q)=1$, $p\leq q$, $f(0):=1$

– $g(x):=1$ si $x\in]0,1]$ et $g(0):=0$.

Les fonctions f et g sont Riemann intégrables (*cf.* exemple 2 pour f, g étant en escalier), cependant on constate que $g\circ f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\notin\mathscr{I}([0,1],\mathbb{R})$ (*cf.* exemple 1). La Riemann intégrabilité n'est donc pas stable par composition. Néanmoins, le résultat est vrai dès que la fonction g est continue.

1.4 Intégrale de Riemann et calcul de primitive

***Proposition* 1.7.** *Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$. Alors f est Riemann intégrable sur tout intervalle $[a,x]$, $x \in [a,b]$ et l'on pose $F(x) := \int_a^x f$ pour $x \in [a,b]$.*

(a) F est lipschitzienne de rapport $\|f\|_{\sup}$ (i.e. $|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_{\sup}\,|x-y|$*).*

(b) Si f est continue à droite en $c \in [a,b[$, alors F est dérivable à droite en c et $F'_d(c) = f(c)$, idem à gauche sur $]a,b]$.

***Corollaire* 1.2.** *Si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive sur $[a,b]$,* i.e. *une application $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ telle que $F' = f$, et toute primitive F de f vérifie :*

$$\forall\, x \in [a,b], \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f.$$

***Application* 1.3.** La fonction $(x \mapsto 1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc une (unique) primitive nulle en 1 : c'est le logarithme népérien $\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Contre-exemple : Il existe des fonctions f non Riemann intégrables (et donc *a fortiori* non continues) admettant des primitives. Ainsi, la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) := -\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in]0,1],\ f(0) := 0,$$

a pour primitive sur $[0,1]$ la fonction F définie par

$$F(x) := x^{\frac{3}{2}}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \in]0,1], \quad F(0) := 0.$$

Or, la fonction f n'étant pas bornée – $f(\frac{1}{2\pi n}) = -\sqrt{2\pi n}$ – ne peut être Riemann intégrable sur $[0,1]$.

***Proposition* 1.8.** *Si $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dérivable (à droite) de dérivée (à droite) F'_d Riemann intégrable sur $[a,b]$, alors*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'_d.$$

1.5 Changement de variable et intégration par parties

Ce sont les deux principaux outils pratiques du calcul intégral élémentaire.

***Théorème* 1.2** (Changement de variable élémentaire)**.** *Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}(\varphi([\alpha,\beta]),\mathbb{K}) \subset \mathscr{I}(\varphi([\alpha,\beta]),\mathbb{K})$. Alors :*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Remarque : Seuls les changements de variable monotones ont un intérêt pratique. Dans ce cas $\varphi([\alpha,\beta])=[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$ ou $[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)]$ selon que φ est croissante ou décroissante.

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)}$. On pose $x := \varphi(u) := \mathrm{argsh}(u) \in \mathscr{C}^1([0,\mathrm{sh}(a)])$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(\mathrm{sh}(a))=a$ et $\varphi'(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, donc

$$\int_0^a \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{\mathrm{sh}(a)} \frac{du}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(u))\sqrt{1+u^2}} = \int_0^{\mathrm{sh}(a)} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(\mathrm{sh}(a)).$$

***Théorème* 1.3** (Intégration par parties élémentaire)**.** *Soient $f,g \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K})$. La formule d'intégration par parties s'écrit*

$$\int_a^b f\,g' = [f\,g]_a^b - \int_a^b f'\,g.$$

Exemple : Calcul d'une primitive de la fonction arctan :

$$\int_0^x \arctan(u)\,du = [u\arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2}\,du = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

1.6 Formules de la moyenne

***Proposition* 1.9** (Première formule de la moyenne)**.** *Soient $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f\,g = f(c)\int_a^b g.$$

Remarques : • Si $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f = f(c)\,(b-a)$.

• Le résultat n'est pas vrai si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix}\,dx = 0 \neq e^{ic}\,(2\pi-0)$ pour tout $c \in [0,2\pi]$.

***Proposition* 1.10** (Seconde formule de la moyenne)**.** *Soient $f,\ g \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R})$, f positive et décroissante. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f\,g = f(a_+)\int_a^c g.$$

***Application* 1.4.** Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, Riemann intégrables sur tout intervalle compact de $[1,+\infty[$ et vérifiant : f est positive, décroissante, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $G(x) := \displaystyle\int_1^x g$ est bornée, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f\,g$ existe dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : La fonction $\displaystyle\int_1^x f\,g$ vérifie le critère de Cauchy au voisinage de $+\infty$. En effet,

$$\begin{aligned}\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,A_\varepsilon\geq 1,\ \forall\,y\geq x>A_\varepsilon,\ \left|\int_1^y f\,g-\int_1^x f\,g\right| &= \left|\int_x^y f\,g\right|\\ &= f(x_+)\,|G(c)-G(x)|\\ &\leq 2\,f(x)\,\|G\|_{\sup}<\varepsilon. \quad \Diamond\end{aligned}$$

En appliquant ce dernier résultat aux fonctions $f(x):=\dfrac{1}{x^\alpha}$ et $g(x):=\sin(x)$, on établit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$ est convergente pour $\alpha\in\,]0,1]$, bien que non absolument convergente (nommée intégrale généralisée semi-convergente).

1.7 Sommes de Riemann

***Définition* 1.5.** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ et $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle* pas de la subdivision σ *la quantité* $\|\sigma\|:=\max\limits_{1\leq i\leq n}(a_i-a_{i-1})$. *Soit $\xi_\sigma=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\xi_i\in[a_{i-1},a_i]$. On définit* la somme de Riemann *relative à f, σ et ξ_σ par :*

$$S(f,\sigma,\xi_\sigma):=\sum_{i=1}^n (a_i-a_{i-1})\,f(\xi_i).$$

On notera que $S(f,\sigma,\xi_\sigma)=\displaystyle\int_a^b\varphi$ où φ est une fonction en escalier vérifiant $\varphi(x):=f(\xi_i)$ pour $x\in]a_{i-1},a_i[$.

***Théorème* 1.4.** *Si $f\in\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$, alors*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\,\sigma\ \textit{subdivision de}\ [a,b],\ \|\sigma\|\leq\alpha\Rightarrow\left|S(f,\sigma,\xi_\sigma)-\int_a^b f\right|\leq\varepsilon.$$

On peut établir ce résultat à titre d'exercice lorsque $f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ en utilisant l'uniforme continuité de la fonction f sur le compact $[a,b]$. Dans le cas général, sa démonstration est plus délicate.

***Application* 1.5.** Si $f\in\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_a^b f.$$

Ainsi, par exemple,

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2.$$

1.8 L'espace semi-normé $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$

***Définition* 1.6.** *On pose, pour toute fonction $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$, $N_1(f) := \displaystyle\int_a^b |f|$.*

***Proposition* 1.11.** $(\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K}), N_1)$ *est un espace semi-normé non complet.*

La semi-norme N_1 n'est pas une norme car la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) := 0$ si $x \in]0,1]$ et $f(0) := 1$, n'est pas nulle sur $[0,1]$ bien que $\displaystyle\int_0^1 |f| = 0$. On admettra que l'on peut exhiber une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ vérifiant :

(i) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \geq 1,\ \forall\, p,q \geq n_\varepsilon, \quad N_1(f_p - f_q) \leq \varepsilon,$

(ii) Pour aucune fonction $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ on a $\lim_n N_1(f_n - f) = 0$.

Cependant, lorsque la fonction f est continue et positive, on montre aisément que, si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f \equiv 0$. On en déduit aussitôt que $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}), N_1)$ est un espace normé. Mais lui non plus n'est pas complet.

***Proposition* 1.12.** $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}), N_1)$ *est un espace normé non complet.*

La non-complétude découle du contre-exemple suivant :

Contre-exemple : Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ affine par morceaux définie par $f_n := 1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $f_n := 0$ sur $[\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1]$. On vérifie, d'une part, que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy dans $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), N_1)$ et, d'autre part, qu'elle converge simplement et dans $(\mathscr{I}([0,1],\mathbb{R}), N_1)$ vers $\tilde{f}_\infty := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} \notin \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Si f_n convergeait vers une fonction continue f_∞ au sens de la norme N_1, on aurait nécessairement $N_1(f_\infty - \tilde{f}_\infty) = 0$. Or, on vérifie sans peine que, pour toute fonction continue f, $N_1(f - \tilde{f}_\infty) > 0$. D'où la non-complétude annoncée.

1.9 Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} J \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

où J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

***Proposition* 1.13.** (a) *(Continuité sous le signe intégrale) Si $f \in \mathscr{C}(J \times [a,b],\mathbb{K})$, alors la fonction F définie par $F(t) := \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dx$ est continue sur J.*

(*b*) *(Dérivabilité sous le signe somme) Si f et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sont dans $\mathscr{C}(J \times [a,b], \mathbb{K})$, alors F est dérivable sur J et*

$$\forall\, t \in J, \quad F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx.$$

Remarque : Si $g \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ et $f(t,x) := g(x)$ si $x \leq t$ et $f(t,x) := 0$ si $x > t$, on note que $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\ dx = \int_a^t g$ ne rentre aucunement dans le cadre de la proposition précédente.

Ce résultat laisse donc ouvert tous les cas où f n'est pas continue et, surtout, celui où l'intégrale est définie sur un intervalle non compact ($\mathbb{R}$, $]0,1[$, $\ldots$). En fait, il existe des théorèmes généraux relatifs aux intégrales généralisées dépendant d'un paramètre mais ceux-ci sont d'un usage compliqué et il est généralement plus efficace de “couper” les intégrales en morceaux pour faire le travail “à la main”.

***Application* 1.6.** *Calcul de l'intégrale impropre* $F(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ e^{-tx} dx,\, t \geq 0.$

Démonstration : L'idée est de dériver sous le signe intégral pour faire apparaître la fonction $x \mapsto \sin x\, e^{-tx}$ dont il est facile de calculer une primitive. Mais les théorèmes dont on dispose ne sont valables que sur des intervalles compacts. On considère donc la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$F_n(t) := \int_0^n \frac{\sin x}{x}\ e^{-tx}\, dx, \quad t \geq 0.$$

Étape 1 *La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}_+$ et F est continue sur $\mathbb{R}_+$* :

Soient $n \leq m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto x^{-1}\, e^{-tx}$ étant positive, décroissante et continue, il existe d'après la seconde formule de la moyenne (proposition 1.10), un réel $c \in [n,m]$ tel que

$$F_m(t) - F_n(t) = \int_n^m \frac{\sin x}{x}\ e^{-tx}\, dx = \frac{e^{-nt}}{n} \int_n^c \sin x\, dx = \frac{e^{-nt}}{n}\,(\cos n - \cos c).$$

Le critère de Cauchy de convergence uniforme est donc vérifié puisque

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad |F_m(t) - F_n(t)| \leq \frac{2}{n}.$$

D'autre part, la fonction g définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $g(t,x) := \dfrac{\sin x}{x}\ e^{-tx}$ si $x \neq 0$ et $g(t,0) := 1$ est continue sur le pavé $[0,n] \times \mathbb{R}_+$. La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après la proposition 1.13. Finalement la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Elle l'est donc en particulier en 0.

Étape 2 *La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(t) = \dfrac{-1}{1+t^2}$* :

Comme $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\right)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,n] \times \mathbb{R}_+$. Par suite, d'après la proposition 1.13(b), la fonction F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F_n'(t) = -\displaystyle\int_0^n \sin x\, e^{-tx}\, dx.$

Soient $a > 0$, $t \geq a$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il vient, d'après la relation de Chasles,

$$\left|F_n'(t) + \int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-tx}\, dx\right| = \left|\int_n^{+\infty} \sin x\, e^{-tx}\, dx\right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-tx}\, dx = \frac{1}{nt} \leq \frac{1}{na}$$

et $$\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-tx}\, dx = \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x}\, dx\right) = \Im\left(\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t}\right]_{x=0}^{x=+\infty}\right) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

La suite $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[a, +\infty[$. Comme F est limite simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$, F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ *i.e.* sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t > 0$.

<u>Étape 3</u> $\forall t \geq 0, \quad F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t$:

D'après l'étape 2, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t > 0$, $F(t) = k - \arctan t$. Comme F est continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = F(0) = k$. D'autre part, pour tout $t > 0$,

$$|F(t)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| e^{-tx}\, dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t},$$

d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0 = k - \dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t$. $\Diamond$

Conclusion

On a pu constater à plusieurs reprises dans ce chapitre que l'intégrale de Riemann souffrait de nombreuses limitations tant sur le plan théorique que pratique : ainsi, une fonction Riemann intégrable est nécessairement bornée, $\mathscr{I}([a, b])$ l'espace des fonctions Riemann intégrables n'est stable, ni par convergence simple, ni par composition quand cela est possible. L'espace $\big(\mathscr{I}([a, b]), N_1\big)$ n'est pas complet. Les intégrales dépendant d'un paramètre ne donnent lieu à des résultats généraux que dans des cadres très restrictifs (fonctions continues).

En outre, malgré toutes ces limitations, l'intégrale de Riemann reste un outil très technique et d'un maniement délicat. D'où l'intérêt d'introduire une nouvelle notion d'intégrale possédant un plus vaste champ d'applications et fournissant des outils plus puissants dans la résolution des questions pratiques.

Quant à l'intégrale de Riemann, elle conserve néanmoins certains attraits, notamment par son extension immédiate aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach (*i.e.* un espace vectoriel normé complet). En effet, l'extension de l'intégrale au sens de Lebesgue à ce type de fonctions, qui ne sera pas abordée dans cet ouvrage, se révèle, elle, particulièrement délicate.

1.10 Exercices

Les exercices 1.9, 1.11, 1.12, 1.15, 1.16, 1.18 traitent du problème d'interversion limite-intégrale et pointent les insuffisances de l'intégrale de Riemann liées à l'emploi restrictif de la convergence uniforme (*cf.* proposition 1.4), qui nécessite souvent des découpages d'intégrales assez techniques. Les puissants théorèmes de l'intégrale de Lebesgue du chapitre 8 permettront de surpasser ces difficultés (*cf.* en particulier l'exercice 8.0).

1.1 $a)$ Soient $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur un intervalle borné contenant l'image de f. Montrer que $g \circ f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$.
$b)$ Plus généralement, montrer que $g \circ f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{K})$ si g est continue.

1.2 *Lemme de Riemann-Lebesgue* et *Problème de Bâle* 1

$a)$ Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\lim\limits_n \displaystyle\int_a^b f(x)\, e^{inx}\, dx = 0$.

$b)$ Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \big(\alpha\, x + \beta\, x^2\big) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2}$.

$c)$ Montrer que pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\big((n{+}1/2)\, x\big)}{2\, \sin(x/2)} - \frac{1}{2}$.

$d)$ En déduire la formule $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en appliquant $a)$ sur $[\delta,\pi]$, $\delta \in]0,\pi]$, et en majorant l'intégrale sur $[0,\delta]$ à l'aide de l'inégalité $\sin(x/2) \geq x/\pi$.

1.3 Montrer que la fonction f suivante est réglée :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

1.4 Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

1.5 Calculer la limite de la suite $u_n := \left(\dfrac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{1/n}$ pour $n \geq 1$.

1.6 Soit $f \in \mathscr{I}([0,1],\mathbb{R})$. Calculer la limite de $T_n := \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^n (-1)^k\, f\Big(\frac{k}{n}\Big)$, $n \geq 1$.

1.7 *Somme de Riemann*

$a)$ Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ soit convergente. Montrer que $\lim\limits_n \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a + \frac{k}{n}\,(b{-}a)\Big) = \int_a^b f(x)\, dx$.

$b)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

En déduire, à l'aide du $a)$ la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\,dx$.

1.8 Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que f soit décroissante et $0 \le g \le 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \le \int_0^I f(x)\,dx$ où $\displaystyle I := \int_0^1 g(x)\,dx$.

1.9 Soit $(f_n)_{n\ge1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $\displaystyle f_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.
Montrer que $(f_n)_{n\ge1}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\big(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), N_1\big)$ où $N_1(f) := \int_0^1 |f|$.

1.10 $a)$ Soit $(f_n)_{n\ge0}$ la suite définie par $\displaystyle f_n(x) := \frac{2^n x}{1 + n\,2^n x^2}$ pour $x \in [0,1]$.
La suite $(f_n)_{n\ge0}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? Sur $[a,1]$ avec $a>0$?
$b)$ Calculer $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1.11 $a)$ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^n}$ à l'aide d'un développelement en série.
$b)$ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$ en développant en série la fonction $\displaystyle x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $[0,a]$, $a \in [0,1[$, et en majorant l'intégrale sur $[a,1]$.

1.12 $a)$ Montrer que pour tout $n \ge 1$, la fonction $\displaystyle f_n : x \mapsto e^x - \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$b)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_n \int_0^n \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x}\,dx$.

1.13 Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\displaystyle f(x) := \int_0^x \sin(1/t)\,dt$ pour $x \ge 0$, en particulier au point 0.

1.14 Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ par $\displaystyle f(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, en particulier aux points 0 et 1.

1.15 *Intégrale de Gauss*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\displaystyle f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$a)$ Montrer que $\displaystyle \forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2.$

$b)$ En déduire la valeur de $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$c)$ Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer g' et $\lim\limits_{+\infty} g$ puis g.

$d)$ En déduire à nouveau la valeur de I.

1.16 *Problème de Bâle* 2, seconde résolution d'Euler en 1741 ([1])

$a)$ *Intégrales de Wallis* : Soit $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n,\ \ I_{n+1}\, I_n = \dfrac{\pi}{2n+2},\ \ I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

$b)$ Soit f la fonction définie par $f(x) := (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour $x \in [0,1[$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,\ \ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(2n+1)\, I_{2n+1}}\,(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$.

En déduire que $\forall\, x \in [0,1[\,,\ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)\, I_{2n+1}}$.

$c)$ Montrer que $\forall\, x \in [0,1[\,,\ \ \arcsin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2\, I_{2n+1}}$.

$d)$ Montrer, à l'aide de la question $c)$, que

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Conclure en séparant les termes pairs et les termes impairs dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.17 *Problème de Bâle* 3, tiré de l'article ([2])

On reprend l'intégrale de Wallis de l'exercice 1.16 : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n\,d\theta$, obtenu avec $x = \cos\theta$, et on définit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\,(\cos\theta)^{2n}\,d\theta$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$a)$ Montrer en intégrant par parties, que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_{2n} = n(2n-1)\, J_{n-1} - 2n^2\, J_n$.

$b)$ En déduire, à l'aide de 1.16 $a)$, que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2\, J_{n-1}}{I_{2n-2}} - \dfrac{2\, J_n}{I_{2n}}$.

1. L. Euler, "Démonstration de la somme de cette suite 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + ...", *Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord*, vol. 2 (1743), 115-127. Archivé dans *Opera Omnia*, Series. 1, vol. 14, 177-186 (E63).

2. Y. Matsuoka, "An elementary proof of the formula $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$", *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), 485-487.

c) Montrer l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{J_n}{I_{2n}} \leq \dfrac{\pi^2}{4}\Big(1 - \dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\Big)$ en utilisant l'inégalité de convexité $\sin\theta \geq \dfrac{2}{\pi}\theta$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.18 *Autour du problème de Bâle* 4, tiré de l'article ([3])

a) Montrer que

$$\forall x \in]0,1[\,, \quad \ln(x)\ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt - \int_1^{1-x} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = 0.$$

b) En déduire que

$$\forall x \in]0,1[\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(x^n + (1-x)^n\big)}{n^2} + \ln(x)\ln(1-x).$$

c) Montrer la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}\,n^2} + (\ln 2)^2$.

3. L. Euler, "De summatione innumerabilium progressionum", *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 5 (1738), 91-105. Archivé dans *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 25-41. (E20).

Chapitre 2

Éléments de théorie des cardinaux

2.1 Cardinaux

***Définition* 2.1.** *Soient X et Y deux ensembles. On dit que X est équipotent à Y, et l'on note X éq. Y ou* $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$*, s'il existe une bijection de X sur Y.*

Il est immédiat que tout ensemble X est équipotent à lui-même car l'application identité sur X est une bijection de X sur X. Si une fonction $f : X \to Y$ est bijective, elle admet une réciproque bijective $f^{-1} : Y \to X$, en conséquence, si X éq. Y, alors Y éq. X. Enfin la composée de deux applications bijectives étant bijective, il est clair que, si X éq. Y et Y éq. Z, alors X éq. Z.

La relation d'équipotence est donc une relation d'équivalence sur la "collection de tous les ensembles" dont les "classes" définissent les "cardinaux". La présence de "guillemets" est justifiée par le fait que la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble, sinon cet ensemble serait élément de lui-même. La notion de classe d'équivalence associée de façon *naïve* à la relation d'équipotence n'est donc pas parfaitement satisfaisante du point de vue de la rigueur. Cet obstacle peut néanmoins être contourné, et les cardinaux définis rigoureusement ([16], E-III-3).

Exemples : 1. $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents car l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \qquad \text{où} \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est bijective.

2. $\mathbb{N}$ est équipotent à $2\,\mathbb{N}$ car $n \mapsto 2\,n$ est une bijection.

***Proposition* 2.1.** *Soit X un ensemble. Les ensembles X et $\mathscr{P}(X)$ ne sont pas équipotents et, plus précisément, il n'existe pas de surjection de X sur $\mathscr{P}(X)$.*

DÉMONSTRATION : Supposons l'existence d'une surjection f de X sur $\mathscr{P}(X)$; on pourrait alors trouver un antécédent a à l'ensemble $A := \{x \in X : x \notin f(x)\}$, *i.e.* un élément $a \in X$ tel que $f(a) = A$. Mais si $a \in A$ alors $a \notin f(a) = A$ et si $a \notin A$ alors $a \in f(a) = A$. $\diamondsuit$

Notation-définition :
(a) S'il existe une injection de X dans Y, on notera $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$.

(b) Si $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ et X, Y non équipotents, on notera $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$.

***Théorème* 2.1** (Bernstein)**.**
(a) *S'il existe une injection de X dans Y alors il existe une surjection de Y sur X.*

(b) *S'il existe une surjection de X sur Y alors il existe une injection de Y dans X.*

(c) *S'il existe une injection (resp. surjection) de X dans Y et une injection (resp. surjection) de Y dans X alors X et Y sont équipotents,* i.e. *ont même cardinal.*

(d) *Si X et Y sont deux ensembles, ils se trouvent toujours dans* une et une seule *des trois situations suivantes :*

$$\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y \quad \textit{ou} \quad \operatorname{card} X = \operatorname{card} Y \quad \textit{ou} \quad \operatorname{card} X > \operatorname{card} Y.$$

Ce résultat – difficile – sera admis ici. Pour une démonstration du (c) on peut notamment consulter [30], p. 59.

***Corollaire* 2.1.** *La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur les cardinaux.*

DÉMONSTRATION : La réflexivité est immédiate car, pour tout ensemble X, l'application identité Id_X est injective. L'antisymétrie découle du point (c). La composée de deux applications injectives étant injective, la relation $\leq$ est clairement transitive. La relation est totale d'après le point (d). $\diamondsuit$

Illustrations : 1. Si $X \subset Y$ alors $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$.

2. D'une part $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$ car $n \mapsto \{n\}$ est injective ; d'autre part $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$ car il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ d'après la proposition 2.1.

***Définition* 2.2.** *Un ensemble X est* infini *s'il existe $x_0 \in X$ et une injection de X dans $X \setminus \{x_0\}$. Dans le cas contraire X est dit* fini *et l'on note* $\operatorname{card} X < +\infty$.

Exemple : $\mathbb{N}$ est infini car $(n \mapsto n+1)$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

***Proposition* 2.2.** *S'il existe une injection de X dans Y et si X est infini alors Y est infini. En particulier, dès qu'un ensemble contient une partie infinie, il est lui-même infini.*

DÉMONSTRATION : Soient i une injection de X dans Y et φ une injection de X dans $X \setminus \{x_0\}$ alors l'application ψ définie par

$$\begin{cases} \psi(y) = y & \text{si } y \in Y \setminus i(X) \\ \psi(y) = i\,[\varphi\,(x)] & \text{si } y = i(x) \in i(X) \end{cases}$$

est une injection de Y dans $Y \setminus \{i(x_0)\}$. $\diamondsuit$

Proposition 2.3. *Un ensemble X est infini si et seulement si il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X,* i.e. $\operatorname{card} X \geq \operatorname{card} \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION : Soit X un ensemble infini. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(n+1)$ éléments distincts $x_0, \dots, x_n$ de X et une injection i_n de X dans $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. Le résultat est vrai pour $n=0$ d'après la définition d'un ensemble infini. Supposons le vrai pour n. D'après la proposition 2.2, l'ensemble $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ est donc infini ce qui entraîne l'existence d'une injection j de $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ dans $X \setminus \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ où $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. On vérifie aussitôt que $i_{n+1} := j \circ i_n$ est une injection de X dans $X \setminus \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$. Finalement, l'application de $\mathbb{N}$ dans X donnée par $(n \mapsto x_n)$ est une injection.

Réciproquement, l'existence d'une injection de $\mathbb{N}$ dans X entraîne que X est infini d'après la proposition précédente puisque $\mathbb{N}$ est lui-même infini. $\Diamond$

Remarque : La proposition 2.3 se reformule de façon équivalente en :

un ensemble X est fini si et seulement si $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Ceci traduit le fait que les ensembles équipotents à $\mathbb{N}$ sont les plus “petits” ensembles infinis au sens des cardinaux.

Exemples : 1. $\mathbb{R}$ est infini car $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

2. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est infini car $(n \mapsto \{n\})$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Cependant on a vu précédemment que $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Il y a donc plusieurs – et même une infinité – de “classes” d'ensembles infinis dont la plus petite est constituée par les ensembles équipotents à $\mathbb{N}$. C'est cette classe que nous allons maintenant étudier plus en détail.

2.2 Ensembles dénombrables

Définition 2.3. (a) *L'ensemble X est dit* dénombrable *s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$,* i.e. $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} \mathbb{N}$.

(b) *L'ensemble X est dit* infini dénombrable *si X est équipotent à $\mathbb{N}$,* i.e. $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$. *On note $\aleph^0$ ([1]) le cardinal infini dénombrable.*

(c) *Si* $\operatorname{card} X > \operatorname{card} \mathbb{N}$*, X est dit* non dénombrable *ou parfois* infini non dénombrable.

Ainsi $\mathbb{N}$ est-il évidemment infini dénombrable et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est-il infini non dénombrable (*cf.* exemple ci-dessus).

Remarque : D'après le théorème de Bernstein, un ensemble X est infini dénombrable si et seulement si il est infini et dénombrable (ce qui assure la cohérence de la définition).

On déduit immédiatement de ces définitions les propriétés ci-après.

1. $\aleph$ (prononcer “aleph”) est la première lettre de l'alphabet hébraïque.

***Proposition* 2.4.** *(a) L'ensemble X est dénombrable si et seulement si il est fini ou infini dénombrable.*

(b) Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

(c) Si X est infini, Y dénombrable et $X \subset Y$ alors Y est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : (b) Soit $X' \subset X$. La composée de l'injection canonique de X' dans X par une injection de X dans $\mathbb{N}$ est une injection de X' dans $\mathbb{N}$. Donc X' est dénombrable.

(c) L'ensemble Y est infini d'après la proposition 2.3, dénombrable par définition donc infini dénombrable. $\diamondsuit$

***Application* 2.1.** (a) $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.

(b) $\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable.

(c) $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : (a) L'application Φ définie par

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ 2\,n & \longmapsto & n \\ 2\,n-1 & \longmapsto & -n \end{array}$$

est une bijection, donc $\mathbb{Z}$ est bien équipotent à $\mathbb{N}$.

(b) L'application Φ définie par

$$\begin{array}{ccl} \Phi : \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & \Phi(p,q) := \dfrac{(p+q)\,(p+q+1)}{2} + q \end{array}$$

est une bijection. Cette application Φ consiste à numéroter les couples de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ au fur et à mesure de leur rencontre le long du parcours indiqué ci-dessous.

(c) D'une part $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q}$ est infini. D'autre part, tout rationnel r s'écrit de façon unique $r = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, pgcd$\,(p,q) = 1$ (l'écriture canonique de 0 est donc $0 = \frac{0}{1}$). L'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ \dfrac{p}{q} & \longmapsto & (p,q) \end{array}$$

est donc une injection. Or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^2$, lui-même équipotent à $\mathbb{N}$, donc par composition, il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. $\diamondsuit$

On déduit immédiatement de la proposition précédente

***Corollaire* 2.2.** *(a) Pour tout $d \geq 1$, $\mathbb{N}^d$ est dénombrable,*

(b) Pour tout $d \geq 1$, si les ensembles $X_1, \ldots, X_d$ sont dénombrables, alors le produit cartésien $X_1 \times \ldots \times X_d$ est dénombrable. En outre, si tous les X_i sont non vides, $X_1 \times \ldots \times X_d$ est infini dénombrable dès que l'un des X_i est infini dénombrable.

DÉMONSTRATION : On établit directement le point (b) *via* une récurrence sur $d \geq 2$. Supposons $d = 2$. Les ensembles X_1 et X_2 étant dénombrables, il existe deux injections Φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$. On vérifie immédiatement que l'application $\Phi : X_1 \times X_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\Phi((x_1, x_2)) := (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2))$ est injective. Le produit $X_1 \times X_2$ est donc dénombrable.

Supposons, par exemple, X_2 infini dénombrable. Alors X_2 éq. $\mathbb{N}$ et l'on peut supposer que Φ_2 est une bijection. Soit $x_1^0 \in X_1$ un élément fixé de l'ensemble non vide X_1. L'ensemble $\mathbb{N}$ s'injecte dans $X_1 \times X_2$ *via* $\Psi(n) = (x_1^0, (\Phi_2)^{-1}(n))$.

Le passage de d à $d + 1$ se fait en notant d'abord que

$$X_1 \times \ldots \times X_d \times X_{d+1} = (X_1 \times \ldots \times X_d) \times X_{d+1}.$$

Enfin, quitte à changer l'indexation des ensembles, on peut toujours supposer, si l'un des ensembles X_i est infini dénombrable, qu'il s'agit de X_{d+1}. $\diamondsuit$

Proposition 2.5. *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

DÉMONSTRATION : Soit $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, $I \subset \mathbb{N}$ où chaque ensemble X_i, $i \in I$, est dénombrable. Pour tout $i \in I$, on considère une injection φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $x \in X$, on définit l'entier naturel $n(x) := \min\{i \in I \,;\, x \in X_i\}$. L'application Φ définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ x & \longmapsto & \Phi(x) := \big(n(x), \varphi_{n(x)}(x)\big) \end{array}$$

est une injection. En effet, si $x \neq y$, soit $n(x) \neq n(y)$ et $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, soit $n(x) = n(y) = n$ auquel cas $x, y \in X_n$ et $\varphi_n(x) \neq \varphi_n(y)$ car φ_n est injective, donc $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Par conséquent, X est dénombrable. $\diamondsuit$

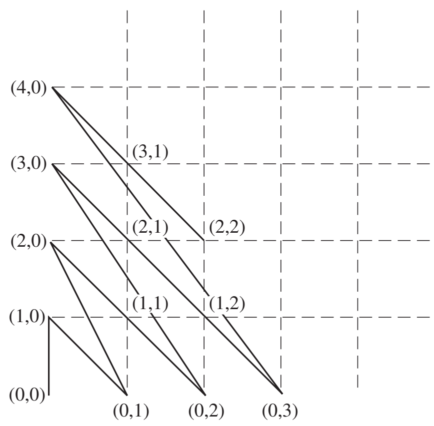

FIGURE 2.1 – Dénombrabibilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Analyse. Théorie de l'intégration

Le livre présente les bases de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue et ses premières applications. Il s'adresse aux étudiants en Licence 3 et en Master 1 de mathématiques pures ou appliquées, aux candidats à l'agrégation ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs, avec un cours complet et plus de 260 exercices corrigés.

Il propose plusieurs niveaux de lecture où l'on distingue clairement les connaissances indispensables à maîtriser lors d'une première initiation et les applications à aborder lors d'une lecture plus approfondie.

Cette 8e édition revue et augmentée développe toujours la théorie de l'intégration et ses applications et s'enrichit d'un chapitre entièrement refondu consacré aux Transformées de Fourier et de Laplace, ainsi que de 30 exercices supplémentaires inédits.

SOMMAIRE

LES PLUS

- **Une sélection de QCM corrigés**
- **11 problèmes d'examens**
- **La note d'Henri Lebesgue aux Comptes rendus de l'Académie des sciences, fondant l'intégrale éponyme**

Marc Briane est professeur à l'I.N.S.A. Rennes. Il enseigne l'algèbre en Licence 1, l'intégration, la topologie, l'analyse complexe et les transformées (de Fourier et de Laplace) en Licence 3 et l'analyse hilbertienne en Master 1.

Gilles Pagès est professeur à Sorbonne Université. Il enseigne l'intégration, les probabilités, l'optimisation stochastique et les mathématiques financières en Licence et en Master. Il est responsable du Master 2 « Probabilités & Finance » commun à Sorbonne Université et à l'École polytechnique.

39,90 €

ISBN : 978-2-8073-5955-0

9 782807 359550

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®